

Учебные материалы по Теории поля

Факультет физики ВШЭ

Текст скомпилирован 15 августа 2026 г., 14:17

Актуальная версия учебных материалов (программа курса по неделям с задачами на семинар и домашнее задание, конспект лекций), а также дополнительная литература находятся в

[папка с учебными материалами](#)

Домашнее задание сдаётся каждую неделю. Домашние задания прошлых недель, по каким-то причинам не(до)выполненные, можно доносить, но баллы будут выставляться с понижающим коэффициентом (около 0.5).

Домашние задания и контрольные желательно выполнять на листах А4. Сдавать домашние задания и контрольные лучше и желательно в электронном виде. Такой порядок позволяет более оперативно производить проверку работ и установить обратную связь. Для изготовления скана работы в требуемом виде на смартфоне следует использовать программы

android: **Genius Scan**
iphone: **tapScanner** или **Adobe Scan**

Эта программа даёт возможность изготовить из фотографии *вычищенный pdf-документ в чёрно-белом* формате. Разумеется, допустимы и некоторые другие программы. Но сканы в шкале серого, или с полями, или с грязным фоном сильно не приветствуются. Совершенно невозможен приём архивов с фотографиями отдельных страниц.

У некоторых студентов есть touch-планшеты с пером, благодаря чему они могут подготавливать свои рукописные работы непосредственно в электронном виде.

Это приветствуется. В этом случае студент может использовать несколько цветов за исключением красного цвета, которым преподаватель будет выделять свои пометки при проверке работ.

Оформляя лист, следует выделить сверху информационное поле горизонтальной чертой. В этом поле указывается *Фамилия Имя* автора, *тип работы* (домашнее задание №2, контрольная №1 и т.д.), *номер листа*. Название pdf-файла надо составлять по шаблону:

Ларина Татьяна - дз03.pdf
Ларина Татьяна - дз03 - доделки.pdf
Ларина Татьяна - кр2.pdf

Шаблон определяет, в том числе, пробелы, дефисы, строчные и прописные буквы. Совершенно не допускается машинное название pdf-файла, автоматически сгенерированное при его первичном создании.

Высылать домашние задания надо с корпоративной почты ВШЭ. Высылать с другой почты не желательно и можно только в том случае, если по названию почтового адреса ясно можно понять фамилию и первую букву имени отправителя, а в реквизитах почтового адреса указаны полностью Фамилия и Имя. Адреса преподавателей:

- Вергелес Сергей Сергеевич:
ssvergeles@yandex.ru
- Огородников Леон Леонтьевич:
noel95@mail.ru
- Воинцев Иван Алексеевич:
vointsevivan@gmail.com

Оглавление

ПРОГРАММА КУРСА	4
I. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА	17
1. Четырёх-мерное пространство-время	17
1-1 Постулаты релятивистской механики	17
1-2 Инерциальные системы координат	20
1-3 Преобразование Лоренца	22
1-4 Преобразование Лоренца: лоренцевский буст	25
1-5 Неравномерное движение материальной точки	27
1-6 Описание движения частиц в терминах непрерывной среды	28
2. Движение свободных частиц; соударения частиц	33
2-1 Действие и уравнения движения для свободной частицы	33
2-2 Распад и столкновения частиц	35
2-3 Тензор энергии-импульса	37
2-4 Тензор энергии-импульса для модельных сред	39
2-5 Момент импульса	40
3. Движение частиц в электромагнитном поле	42
3-1 Движение заряженной частицы в электромагнитном поле	42
3-2 Свойства электромагнитного поля	45
3-3 Движение частицы в однородном поле	47
3-4 Движение нерелятивистской частицы в слабо неоднородном магнитном поле	49
3-5 Движение частиц со спином	51
4. Электромагнитное поле	55
4-1 Уравнения движения электромагнитного поля	55
4-2 Тензор энергии-импульса	57
4-3 Электромагнитные волны	59
4-4 Геометрическая оптика	64
4-5 Симметрии в классической электродинамике	65
5. Электростатика и магнитостатика	67
5-1 Неподвижные заряды постоянное электрическое поле	67
5-2 Постоянные токи и магнитное поле	73
6. Возбуждение электромагнитных волн зарядами	77
6-1 Поле движущегося точечного заряда	77
6-2 Функции Грина волнового уравнения	80
6-3 Дипольное излучение	83
6-4 Магнито-дипольное и квадрупольное излучение	86
6-5 Торможение излучением	89
II. КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА	93
7. Лагранжев и Гамильтонов формализмы	93
7-1 Формализм Лагранжа: одна степень свободы	93
7-2 Формализм Гамильтона: одна степень свободы	94
7-3 Законы сохранения	96
III. APPENDIX	99
8. Элементы тензорного анализа	99
8-1 Тензорное исчисление	99
8-2 Евклидово пространство	102
8-3 Пространство Минковского	104
9. Криволинейные координаты	106
9-1 Криволинейные координаты, вложенные в евклидово пространство	106

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	110
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	111

ПРОГРАММА КУРСА

Темы лекций и семинаров по курсу “Теория поля”

- 1 Постулаты релятивистской механики. Пространство-время. Преобразование Лоренца. Пространство Минковского. Аналогия преобразования Лоренца с ортогональным поворотом в 3D. Движение точечных частиц. Лоренцево сокращение длины.
- 2 Импульс частиц. Безмассовые частицы. Преобразование импульса. Реакции; реакция $1 \rightarrow 2$.
- 3 Действие для свободной частицы. Реакция $2 \rightarrow 2$. Электрический ток. Аксиальные 3D вектора.
- 4 Уравнения Максвелла (постулирование). Движение частицы в электромагнитном поле. Действие для частицы в электромагнитном поле. Гамильтоново описание движения частицы в электромагнитном поле. Свойства электромагнитного поля.
- 5 Электростатика. Взаимодействие зарядов. Дипольный момент. Система зарядов во внешнем поле: электрический диполь. Векторные операции в ортогональных криволинейных координатах.
- 6 Мультипольное разложение: уравнение Лапласа в сферических координатах. Квадрупольный момент. Система зарядов во внешнем поле.

Контрольная №1

- 7 Тензор энергии-импульса. Момент импульса.
- 7-8 Магнитостатика. Поле магнитного диполя. Лагранжиан системы токов во внешнем магнитном поле; сила и момент сил, действующие на магнитный диполь. Теорема Лармора.
- 8 Свободное электромагнитное поле. Преобразование Фурье. Сферические волны.
- 9 Запаздывающие потенциалы. Излучение точечного диполя. Тормозное излучение.
- 10 Магнитодипольное и квадрупольное излучения.
- 11 Описание поля и его тензора энергии-импульса в терминах комплексных амплитуд. Рассеяние света зарядами.
- 12 Поле точечных зарядов. Равномерно движущийся заряд. Ускоренно движущийся заряд. Магнитотормозное излучение.

Контрольная №2

Неделя 1.

Лекция 1.

Галилеевская механика. Инерциальные системы отсчёта и первый закон Ньютона. Пространство, время и скорость в классической механике. Преобразование Галилея. *Литература: Пункт 1-1.1.*

Постулаты релятивистской механики. Конечность распространения сигналов (скорость света). Сравнение постулатов релятивистской теории с постулатами нерелятивистской Эйлеровой механики. *Литература: Пункт 1-1.2.*

Пространство-время. Понятие пространства-времени. Следствие постулатов релятивистской механики — закон преобразования времени-координат при переходе из одной инерциальной системы с декартовыми координатами в другую. Индексное обозначение компонент 3-векторов и 4-векторов. *Преобразование Лоренца.* Понятие метрического тензора, его сохранение при переходе из одной системы координат в другую. Понятие интервала, его сохранение. Времене-подобные и пространственно-подобные интервалы. Относительность понятия одновременности. § 2.

Преобразование Лоренца. Преобразование Лоренца. Количество параметров в преобразовании Лоренца (подсчёт через инфинитезимально-малое преобразование). Их геометрический смысл. *Лоренцев буст* — инфинитезимально-малое преобразование; обобщение на конечное преобразование через условие равенства единице детерминанта матрицы Лоренца. Определение быстроты, её связь с относительной скоростью движения. *Литература: § 3.*

Пространство Минковского. 4-координата как вектор в пространстве Минковского. Ковариантные и контравариантные вектора. Их преобразование при смене инерциальной системы отсчёта. Понятие скаляра (интервал). *Литература: Пункт 1-2.1, а также § 3.*

Аналогия с ортогональным поворотом в 3D. Инфинитезимально малый поворот. Получение конечного поворота через матричную экспоненту. Угол поворота — аддитивный параметр. Декларация того, что быстрота — аддитивный параметр в Лоренцевском бусте.

Движение точечных частиц. Мировая линия частицы. Световой конус. Касательная к мировой линии. 4-скорость как обобщение трёх-мерной скорости. Собственное время. *Литература: § 5.*

Относительность промежутков времени и расстояний. Собственное и лабораторное времена. Лоренцево сокращение длины. *Литература: Пункт 1-4.1.3.*

Семинар 1.

• **Задача 1:** Пусть вектор в 4-х мерном пространстве $\|x^\mu\| = \{ct, \mathbf{r}\}$. Найдите ковариантный вектор $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$.

• **Задача 2:** Найдите матрицу $\|g^{\mu\nu}\|$ (матричные элементы), обратную матрице метрического тензора $\|g_{\mu\nu}\|$.

• **Задача 3:** Рассмотрите ‘парадокс’ двух близнецов: близнец А всё время покоится, а близнец В сначала движется от А со скоростью v вдоль Ox , а потом с этой же скоростью движется обратно к нему. Когда они встречаются, близнец А постарел с момента расставания на время T , а близнец В оказался моложе, постарев на время $T_B < T$. Выразите время T_B через v и T .

• **Задача 4:** Рассмотрите инфинитезимально малое преобразование Лоренца, соответствующее движению вдоль оси Ox . Совершите N последовательных переходов Лоренца характеризующихся относительной скоростью движения систем отсчёта вдоль оси Ox со скоростью $c\varphi/N$: на этом пути требуется вычислить матричную экспоненту. С какой относительной скоростью v движутся первая и последняя система отсчёта?

• **Задача 5:** Пусть $f(r)$ — некоторая известная функция, где $r = |\mathbf{r}|$ — модуль радиус-вектора в трёх-мерном пространстве. Сведите объёмный интеграл

$$\int_{r < a} \Delta f d^3r = \int_{r < a} d^3r \operatorname{div} \operatorname{grad} f$$

по внутренности сферы радиуса a к поверхностному интегралу, используя теорему Остроградского-Гаусса и выпишите ответ.

Домашнее задание 1.

• **Задача 6:** В задаче о двух близнецах может возникнуть недоумение: ведь близнец В двигался с ускорением совсем немного, когда разворачивался в обратный путь. Во все остальные моменты можно сказать, что В покоился, а А двигался равномерно и прямолинейно. Для того, чтобы разобраться

- 1) Постройте на плоскости Oxt мировые линии движения А и В и убедитесь, что в пространстве Минковского неравенство треугольника не имеет места (вместо евклидова расстояния надо брать интервал).
- 2) То же самое постройте в инерциальной системе координат, в которой близнец В покоился первую часть своего пути.

• **Задача 7:** Запишите Лоренцев буст в терминах быстроты φ . Пусть было последовательно совершено два преобразования с быстротами φ_1 и φ_2 . Непосредственным перемножением матриц преобразования Лоренца убедитесь, что результирующая быстрота равна $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

• **Задача 8:** Пусть в некоторой инерциальной системе отсчёта одно событие произошло в момент времени 0, и в точке $\{0, 0, 0\}$, а другое событие произошло

в момент времени 10 сек и в точке $\{10^{10} \text{ м}, 0, 0\}$. С какой скоростью должна двигаться вторая система отсчёта относительно исходной, чтобы в этой новой системе отсчёта эти два события были одновременными? Какое расстояние будет разделять события в новой системе координат?

• **Задача 9:** Покажите, что совокупность производных $\|\partial_\mu\|$ при преобразовании Лоренца преобразуется как ковариантный 4-вектор.

Неделя 2.

Лекция 2

Импульс. Обобщение трёх-мерного импульса на релятивистский случай. Выражение для пространственной части 4-импульса. Интерпретация 0-компоненты импульса как энергии, нерелятивистский предел. Энергия покоя. Квадрат 4-импульса — инвариант. *Формулировка закона сохранения импульса.*

Безмассовые частицы. 4-импульс безмассовых частиц. Скорость движения безмассовых частиц — скорость света.

Преобразование импульса при смене системы координат. Закон преобразования компонент 4-импульса. Эффект Доплера и абберация света.

Реакции. Система центра инерции. Понятие эффективной массы совокупности частиц. Реакции $2 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 2$ и $2 \rightarrow 2$. Порог реакции. Применение законов сохранения для реакций синтеза частиц (поглощение γ -кванта покоящейся частицей).

Распад $1 \rightarrow 2$. Изотропное распределение в терминах сферических углов. Деформация изотропного распределения скоростей при смене системы координат на примере безмассовой частицы. Ультра-релятивистский и нерелятивистский пределы.

Семинар 2

• **Задача 1:** Определить относительную скорость сталкивающихся протонов в ускорителе со встречными пучками, если энергия протонов в каждом пучке 5000 ГэВ (приблизительные параметры LHC). Какова должна быть энергия налетающих протонов, чтобы столкновение с покоящимся протоном происходило с той же относительной скоростью? Энергия покоя протона равна 938.26 МэВ. В процессе решения задачи ответьте, в частности, на следующие вопросы:

- Чему равен γ -фактор для протонов в лабораторной системе координат и в системе координат, где один из пучков покоится?
- Посчитайте скорость протонов в лабораторной систе-

• **Задача 10:** Вычислите $\Delta(1/r)$ в трёх-мерном пространстве. Ответ проверьте применением теоремы Остроградского-Гаусса для объёмного интеграла по шару радиуса $r = a$.

• **Задача 11:** Раскройте в тензорных (индексных) обозначениях выражения и вычислите (преобразуйте):
 – $\text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})$, где $\mathbf{a}$ — постоянный вектор;
 – $\text{div}(f\mathbf{A})$, где f и $\mathbf{A}$ — произвольные функции координат;
 – $\text{grad } r$, $\text{div } \mathbf{r}$; $(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{r}$, $\text{grad } f(r)$, $\text{div } \mathbf{a}(r)$,
 где $r \equiv |\mathbf{r}|$.

ме координат и относительную скорость сталкивающихся протонов.

При распаде $\pi^\pm$ -мезонов (масса ≈ 140 МэВ) образуются нейтрино (безмассовая частица) и μ -мезон, имеющих массу ≈ 106 МэВ). Распадающиеся $\pi^\pm$ -мезоны движутся в лабораторной системе координат с энергией 6 ГэВ.

• **Задача 2:** Найдите энергию вылетевшего нейтрино в системе центра масс.

• **Задача 3:** Постройте график функции распределения $\mathcal{P}'(\theta')$ для угла вылета θ' в системе центра масс.

• **Задача 4:** Покажите, что для малых углов вылета $\theta \ll 1$ имеет место приближённое равенство $1 - \beta \cos \theta \approx (\theta^2 + 1/\gamma^2)/2$. Воспользовавшись этим, постройте график функции распределения $\mathcal{P}(\theta)$ для угла вылета θ в лабораторной системе координат в пределе $\gamma \gg 1$.

Домашнее задание 2

• **Задача 5:** Если коллайдер на встречных пучках работает в штатном режиме, то при столкновении двух протонов интересующая нас реакция X происходит с превышением её порога в α раз, т.е. $E = \alpha E_{th}$, E — энергия протонов, а E_{th} — их пороговая энергия. Однако из-за неполадок один из двух пучков в коллайдере имеет энергию, составляющую часть ϵ от номинальной. При каком значении ϵ порог реакции X достигнут не будет? Пучки считать релятивистскими, так что $\gamma \gg \alpha^2$.

• **Задача 6:** Для вылетающего нейтрино при распаде $\pi^\pm$ -мезонов постройте график зависимости угла вылета в лабораторной системе координат θ от угла вылета в сопровождающей системе координат θ' . Численные значения параметров системы даны в содержании семинара.

• **Задача 7:** Для этой же задачи посчитайте средние значения $\langle \theta \rangle$ и $\langle 1/\theta \rangle$ в главном порядке по $\gamma \gg 1$ (пользуйтесь приближённым выражением для функции

распределения, см. семинар, при затруднении вычислить обезразмеренный интеграл воспользуйтесь справочником).

Неделя 3

Лекция 3

Действие для свободной частицы. Построение релятивистского действия для частицы. Лагранжиан релятивистской частицы. Нерелятивистский предел. Вариация действия на краях — определение 4-импульса. Вариация действия на пути — закон сохранения импульса. Гамильтониан свободной частицы.

Реакция $2 \rightarrow 2$. Эффект Комптона. Картина рассеяния в системе центра масс. Картина рассеяния в лабораторной системе координат, где электрон — ультрарелятивистский, а налетающий фотон имеет малую энергию.

Электрический ток. Связь плотности заряда и тока с движением точечных зарядов. Плотность заряда, плотность тока и скорость движения как понятия непрерывной среды. Уравнение непрерывности. 4-ток, его инвариант.

Аксиальные вектора. Соответствие между антисимметричной матрицей в 3-х мерном пространстве и аксиальным вектором. Символ Леви-Чивиты. Преобразование символа Леви-Чивиты при ортогональных преобразованиях. Псевдо-тензора: векторное и смешанное произведение векторов.

Семинар 3

• **Задача 1:** Для получения γ -квантов высокой энергии навстречу пучку электронов с энергией $E = 200$ ГэВ выстреливает лазер с энергией фотонов $\varepsilon = 2$ эВ. Какую энергию будут иметь фотоны, рассеянные назад? Для ультрарелятивистских электронов и низко энергетических фотонов, $\gamma \gg 1$ и $\varepsilon \ll E$, в аналитическом виде разберите два предельных случая: $\varepsilon \gg m_e c^2 / \gamma$ и $\varepsilon \ll m_e c^2 / \gamma$. Постройте график зависимости энергии отражённого назад фотона от γ -фактора налетающего электрона в двойных логарифмических координатах.

Разбор проблемных задач из домашних заданий 1-2 недель.

• **Задача 2:** Вычислите свертки

а) $\delta_{ik} \delta_{kl} \delta_{ln} \delta_{ni}$;

б) $\epsilon_{ikl} \epsilon_{njl}$, $\epsilon_{ikl} \epsilon_{nkl}$, $\epsilon_{ikl} \epsilon_{ikl}$.

Воспользуйтесь полученным результатом и раскройте двойное векторное произведение $[\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]]$.

• **Задача 3:** Распределение плотности одномерной

• **Задача 8:** Установите зависимость энергии нейтрино в лабораторной системе координат в зависимости от угла вылета системы центра инерции, $\varepsilon(\theta')$. Найдите плотность вероятности $\mathcal{P}_\varepsilon(\varepsilon)$.

непрерывной среды

$$\rho(t, x) = \rho_0 + \frac{\rho_1 x}{a} \exp\left(-\frac{x^2 + (v_0 t)^2}{a^2}\right),$$

где параметры распределения $\rho_0 > \rho_1$. Найдите распределение плотности потока $j(t, x)$ и скорости движения $v(t, x)$ полагая, что на далёких расстояниях поток отсутствует, $j \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Нарисуйте профили полученных полей в пределе $\rho_1 \ll \rho_0$ для срезов $t = 0$ и $x = 0$.

• **Задача 4 (*):** Плоское зеркало движется со скоростью V в направлении своей нормали. На зеркало падает монохроматическая волна под углом θ к нормали. Определить направление и частоту отраженной волны, считая, что для покоящегося зеркала справедлив обычный закон отражения.

Домашнее задание 3

• **Задача 5:** Для задачи про рассеяние фотонов на высокоэнергетических электронах найдите зависимость энергии фотонов от угла рассеяния (в т.ч. построить график).

• Записать условие сохранения импульса при столкновении. *Указание:* Для того, чтобы исключить неинтересный импульс электрона после столкновения, удобно его одного оставить в правой части уравнения. Затем возвести это равенство 4-векторов в квадрат.

• В задаче есть два малых параметра: отношение энергий налетающих друг на друга фотона и электрона, $\varepsilon/\mathcal{E}$, и $1/\gamma$, где γ -фактор относится к налетающему электрону. Сравните относительное влияние этих двух параметров на зависимость энергии рассеянного фотона. *Указание:* исследование зависимости при углах близких к рассеянию строго назад надо проводить в том же духе, что и исследование функции распределения $\mathcal{P}(\theta)$ для нейтрино. В частности, постройте график зависимости энергии фотона от угла, укажите на нём высоту и ширину пика, асимптотику вдали от пика но при по-прежнему малых углах по сравнению с π .

• **Задача 6:** Раскройте в тензорных обозначениях выражения и вычислите (преобразуйте):

а) $\text{rot rot } \mathbf{A}$, $\text{rot } [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$, $\text{rot}(f \mathbf{A})$, $\text{div } [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$.

б) $\text{rot}[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]$, $\text{rot}(f(r)\mathbf{a})$ где $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{a}$ — постоянные вектора;
 в) $\text{rot} \mathbf{a}(r)$, ($r \equiv |\mathbf{r}|$).

• **Задача 7:** Пусть $B^{ik} = \epsilon_{ikl}B^l$. Покажите, что векторное произведение $[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$ есть то же самое, что результат действия на вектор $\mathbf{v}$ антисимметричной матрицы $\hat{\mathbf{B}}$, $[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = \hat{\mathbf{B}}\mathbf{v}$.

• **Задача 8:** Электрический заряд может двигаться вдоль прямой. Известно, что плотность электрического тока вдоль прямой равна

$$J \exp\left(-\frac{(x-vt)^2}{a^2}\right),$$

Неделя 4

Лекция 4

Уравнения Максвелла. Постулирование уравнений Максвелла. Обсуждение их геометрического смысла. 4-потенциал электромагнитного поля. Калибровочная инвариантность. Статические электрическое и магнитные поля в области, где отсутствуют заряды и токи.

Движение частицы в электромагнитном поле. Сила Лоренца. Уравнение движения заряда в электромагнитном поле. Переписывание уравнения движения в 4-х мерном виде. Тензор электромагнитного поля.

Действие для частицы в электромагнитном поле. Действие для частицы в электромагнитном поле. Лагранжиан частицы. Калибровочная инвариантность. Вывод уравнений движения путём вариации действия.

Гамильтоново описание движения частицы в электромагнитном поле. Канонический импульс. Гамильтониан. Нерелятивистский предел.

Свойства электромагнитного поля. Инварианты электромагнитного поля. Закон преобразования электромагнитного поля при смене инерциальной системы отсчёта.

Семинар 4

• **Задача 1:** Определить движение релятивистской частицы массы m и заряда e в однородном магнитном поле $\mathbf{B}$. Чему равны частота и радиус обращения частицы вокруг линий магнитного поля?

• **Задача 2:** Показать, что однородное магнитное поле $\mathbf{B}$, направленное по оси z , может быть описано векторным потенциалом

$$\mathbf{A} = \{0, Bx, 0\}.$$

Калибровочным преобразованием перейти к потенциалу $\mathbf{A} = [\mathbf{B} \times \mathbf{r}]/2$.

• **Задача 3:** В системе отсчёта K электрическое и магнитное поле взаимно перпендикулярны: $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$. Определите значение инвариантов электромагнитного

где J, v, a — некоторые константы. Известно также, что в далёком прошлом погонная плотность заряда в каждой фиксированной точке прямой была равна нулю. Найдите погонную плотность электрического заряда как функцию времени и координат. Постройте график зависимости плотности от координаты в нулевой момент времени и в момент времени $t = 3a/v$. Считая среду однокомпонентной, запишите связь между плотностью заряда, плотностью тока и локальной скоростью движения зарядов; найдите скорость движения зарядов.

поля в этом случае. С какой скоростью относительно K должна двигаться система K' , в которой имеется только электрическое или только магнитное поле? Всегда ли существует решение и единственно ли оно?

• **Задача 4:** Найти движение релятивистской частицы массы m и заряда e в однородном электрическом поле $\mathbf{E}$. В начальный момент времени частица покоилась.

Домашнее задание 4

• **Задача 5:** Найти движение релятивистской частицы массы m и заряда e в перпендикулярных однородных и постоянных электрическом и магнитном полях $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ в случае $|\mathbf{E}| < |\mathbf{B}|$. Определить скорость дрейфа. Предлагаемая схема решения:

- Записать уравнение движения частицы в системе координат, в которой электрическое поле отсутствует. (Удобно выбрать такую систему координат, скорость движения которой относительно лабораторной имеет нулевую проекцию на магнитное поле.)
- Записать траекторию движения частицы в лабораторной системе координат в параметрическом виде с временем в движущейся системе отсчёта в качестве параметра.
- Изобразить траекторию движения частицы в проекции на плоскость, нормальную к магнитному полю
- Для нерелятивистской частицы ($\gamma \approx 1$, $|\mathbf{E}| \ll |\mathbf{B}|$) уравнения движения оказываются несложным решить непосредственно в лабораторной системе координат. Записать уравнения движения и убедиться в этом.

• **Задача 6:** Релятивистский электрон ($\gamma \gg 1$) пролетает между обкладками конденсатора, имеющими продольный размер L . Сила электрического поля в

конденсаторе равна **Е**. Найдите угол, на который отклонится скорость электрона после пролёта, если исходно она была параллельна обкладкам. Полагайте, что $eEL \ll mc^2$, где e , m — заряд и масса электрона.

• **Задача 7:** Раскройте подинтегральные выражения в тензорных обозначениях и произведите интегрирование по частям (чтобы производные в подинтегральном выражении действовали на компоненты вектора **a**) полагая, что на границе области интегрирования векторные поля **a**, **b** и скалярное поле f обращаются в нуль:

$$\int d^3r (\mathbf{a} \cdot \text{rot } \mathbf{b}), \quad \int d^3r (\text{div } \mathbf{b}) \mathbf{a}, \quad \int d^3r (\mathbf{a} \cdot \text{grad } f)$$

Преобразуйте выражение $[\mathbf{a} \times \text{rot } \mathbf{b}] + [\mathbf{b} \times \text{rot } \mathbf{a}]$.

Неделя 5

Лекция 5

Электростатика. Статическое электрическое поле. Скалярный потенциал поля. Уравнение Пуассона на электростатический потенциал.

Взаимодействие зарядов. Поле точечного заряда. Закон Кулона. Классический радиус электрона. Электростатическая энергия системы зарядов.

Дипольный момент. Дипольный момент, его потенциал и поле (в т.ч. графическое представление). Определение дипольного момента через распределение зарядов в системе. Плотность поляризации.

Электрический диполь. Точечный электрический диполь. Сила и момент сил, действующие на электрический диполь во внешнем неоднородном электрическом поле.

Векторные операции в ортогональных криволинейных координатах. Векторные операции в цилиндрической системе координат: ортогональный базис, правила дифференцирования, операции grad, div, лапласиан от скалярной функции. Векторные операции в сферической системе координат.

Семинар 5

• **Задача 1:** Однородно поляризованный шар массы M и радиуса a помещён в однородное электрическое поле **Е**. Дипольный момент шара равен **d**, в начальный момент времени шар был неподвижен, а вектор **d** составлял малый угол φ_0 с вектором **Е**. Определить дальнейшее движение шара.

• **Задача 2:** Металлический шар радиуса a разрезали пополам и половинки разнесли на расстояние, малое по сравнению с его радиусом. После этого с одной половины на другую перенесли заряд такой, что разность потенциалов между половинами стала равна $2\varphi_0$. Определите дипольный момент системы.

• **Задача 8:** Пусть даны контравариантные вектор A^μ и симметричный тензор второго ранга $T^{\mu\nu}$,

$$\|A^\mu\| = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \|T^{\mu\nu}\| = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

а) Выпишите матричные элементы тензоров A_μ , $T^\mu_\nu = g_{\nu\lambda} T^{\mu\lambda}$, $T_\mu^\nu = g_{\mu\lambda} T^{\lambda\nu}$ и $T_{\mu\nu} = g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} T^{\sigma\rho}$;

б) Вычислите свёртки $A^\mu A_\mu$, T^μ_μ , $T^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$;

в) Вычислите 4-вектор $B^\mu = T^{\mu\nu} A_\nu$.

$g_{\mu\nu}$ — метрический тензор в пространстве Минковского.

• **Задача 3:** Тело массы m , обладающее фиксированным во времени дипольным моментом, может без трения двигаться не вращаясь вдоль прямого стержня. Дипольный момент тела равен d , он направлен поперёк стержня. На расстоянии L от стержня, большом по сравнению с размерами тела, помещён точечный заряд Q . Как должен быть ориентирован дипольный момент, чтобы при небольшом отклонении положения тела от максимального сближения с зарядом оно совершало малые колебания. Чему равен период этих колебаний?

Домашнее задание 5

• **Задача 4:** Заряды ядра и электронного облака в основном состоянии атома водорода образуют следующую объёмную плотность заряда

$$\rho(r) = e\delta(\mathbf{r}) - \frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right),$$

где $e > 0$ — элементарный заряд, $a \sim 10^{-8}$ см — боровский радиус, а первое и второе слагаемые соответствуют ядру и электрону. Найдите электростатический потенциал такой системы. Проверьте полученный результат, отдельно рассмотрев асимптотики $r \ll a$, на которой электрическое поле должно определяться в основном ядром, и $r \gg a$, на которой система должна выглядеть как почти электро нейтральная. Найдите электростатическую энергию взаимодействия электронного облака с ядром.

• **Задача 5:** Вычислите (преобразуйте) выражения, сначала переписав их в сферических координатах, а затем выполнив операции дифференцирования:

$$\text{div}(\mathbf{r}f(r)), \quad \text{в частности } \text{div } \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \text{div } \mathbf{r}, \quad \text{div } \frac{\mathbf{r}}{r^3}; \quad \text{grad } \frac{1}{r}.$$

Неделя 6

Лекция 6

Мультипольное разложение. Поле ограниченной в пространстве системы зарядов на далёком расстоянии. Свойства решений уравнения Лапласа в сферических координатах с сингулярностью в нуле, разложение по сферическим гармоникам. Сферические функции: полиномы Лежандра, присоединённые полиномы Лежандра. Мультипольные моменты. *Литература: Пункт 5-1.2.*

Квадрупольный момент, его потенциал и поле (в т.ч. графическое представление). Определение квадрупольного момента через распределение зарядов в системе.

Система зарядов во внешнем поле. Свойства решений уравнения Лапласа в области, где отсутствует сингулярность. Разложение по сферическим гармоникам. Мультипольное разложение энергии системы зарядов в слабо неоднородном электрическом поле. *Литература: Пункт 5-1.4.*

Семинар 6

Разбор задачи из домашнего задания про распределение заряда в атоме водорода.

• **Задача 1:** Два отрицательных заряда $-q$ расположена на концах отрезка длиной a , а в центре этого отрезка находится заряд $2q$. Найдите электростатический потенциал этой системы зарядов на расстояниях $r \gg a$ от неё.

• **Задача 2:** Дан равномерно заряженный эллипсоид с полным зарядом Q и полуосями a , b и c , в центре эллипсоида помещён компенсирующий точечный заряд $-Q$.

- Найдите квадрупольный момент такой системы зарядов.
- Найти электростатический потенциал на больших расстояниях, считая, что в центре эллипсоида находится компенсирующий точечный заряд $-Q$. Как с удалением от системы убывает потенциал и электрическое поле?
- Построить график угловой зависимости радиальной компоненты электрического поля в плоскости Oxy в

случае, когда $2c^2 = a^2 + b^2$, $a > b$.

- Как изменится электростатический потенциал на далёких расстояниях, если компенсирующий точечный заряд сместить вдоль первой полуоси a на поверхность эллипсоида?

Домашнее задание 6

• **Задача 3:** Четыре точечных заряда Q расположены в вершинах квадрата со стороной a . В центре этого квадрата расположен компенсирующий заряд $-4Q$. Найдите поле этой системы зарядов на расстояниях $r \gg a$. Нарисуйте распределение электрического поля в плоскости, содержащей компенсирующий заряд и перпендикулярной плоскости, в которой расположены все заряды.

• **Задача 4:** Рассмотрите функции углов, являющиеся произведениями компонент единичного вектора:

$$n_i, \quad n_i n_k, \quad n_i n_k n_l, \quad n_i n_k n_l n_n, \quad n_i n_k n_l n_n n_j.$$

Проведите усреднение этих функций по единичной сфере $n_i n_i = 1$; это есть способ выделения гармоники $l = 0$. Используя линейные комбинации первых трёх функций, составьте функции, пропорциональные сферическим гармоникам порядков $l = 1, 2, 3$; делать это надо из соображения, что при каждом фиксированном l тензор соответствующего ранга должен быть симметричным по всем индексам и давать нуль при свёртке по паре индексов. Убедитесь, что результат совпадает с табличным Olver и др., 2010.

• **Задача 5:** Пусть D^{ik} — квадрупольный момент некоторой системы зарядов. Вычислите в трёх-мерном пространстве

$$\partial_i \partial_k \frac{1}{r},$$

а также найдите результат усреднения по сфере $r = \text{const}$ этого выражения непосредственно, а также в комбинации

$$D^{ik} \left\langle \partial_i \partial_k \frac{1}{r} \right\rangle.$$

Контрольная №1

Неделя 7

Лекция 7

Тензор энергии-импульса. Тензор энергии-импульса совокупности невзаимодействующих частиц. Свойство симметричности тензора. Сохраняющийся полный 4-импульс, его сохранение как следствие уравнений движения. Поток энергии, плотность импульса. Поток импульса.

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля. Плотность энергии электромагнитного поля. Вектор Умова-Пойнтинга. Тензор напряжений Максвелла. *Литература: §4-2.3.*

Тензор энергии-импульса совокупности точечных зарядов и электромагнитного поля. Сохраняющийся полный 4-импульс, его сохранение как следствие уравнений движения.

Полный момент импульса системы. Его определение и закон сохранения.

Магнитостатика. Уравнение магнитостатики; статическая калибровка с бездивергентным вектор-потенциалом. Закон Био-Савара-Лапласа. *Литература: Гл. 6 § 2*

Поле магнитного диполя. Потенциал магнитного поля для локализованной в пространстве системы токов. Разложение по сферическим гармоникам вектор-потенциала на далёких расстояниях от такой системы токов. Разложение магнитного поля.

Семинар 7

Разбор задач Контрольной №1.

• **Задача 1:** Используя выражения для Максвелловского тензора напряжений, найдите поверхностную силу, действующую на обмотку катушки индуктивности. Длина катушки L , её радиус a , количество витков N , сила тока I .

• **Задача 2:** Может ли существование электрического тока с объёмной плотностью $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$, где $\mathbf{j}_0$ и $\mathbf{k}$ — постоянные вектора, быть совместным со стационарным распределением зарядов в пространстве?

• **Задача 3 (*):** Найти распределение в простран-

стве электрического тока, создающего магнитное поле (в сферических координатах)

$$B_r = B_0 \left(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2} \right) \cos \theta, \quad B_\theta = B_0 \left(\frac{2r^2}{5a^2} - \frac{1}{3} \right) \sin \theta,$$

при $r < a$ и

$$B_r = \frac{2a^3 B_0}{15r^3} \cos \theta, \quad B_\theta = \frac{a^3 B_0}{15r^3} \sin \theta,$$

при $r > a$, $B_\varphi = 0$ во всём пространстве.

Домашнее задание 7

• **Задача 4:** Нерелятивистская частица с массой m и зарядом e движется в однородном магнитном поле. Магнитное поле медленно меняется со временем — так, что изменение поля за период движения частицы мало по сравнению с самим значением поля. Доказать, что величина $v_\perp^2/B$ остаётся постоянной (т.е. является адиабатическим инвариантом), где $v_\perp$ есть проекция скорости частицы на плоскость нормальную к полю. Показать, что адиабатический инвариант пропорционален величине магнитного диполя, создаваемого движением частицы по окружности; связать вектор магнитного диполя с магнитным полем. Вычислить изменение радиуса орбиты и энергии частицы, если поле изменилось от значения B_1 до B_2 . Указание: можно применить либо общую теорию адиабатических инвариантов, либо

- Определить изменение энергии частицы за один оборот — это работа, совершаемая вихревым электрическим полем.
- Составить конечно-разностное уравнение с шагом в один период, его интеграл является искомым адиабатическим инвариантом.

• **Задача 5:** Используя выражение для Максвелловского тензора напряжений, посчитайте силу, действующую на обкладку конденсатора (расстояние между пластинами d , площадь пластин S , заряд пластин Q)

Неделя 8

Лекция 8

Лагранжиан системы токов во внешнем магнитном поле. Переход от дискретного описания совокупности частиц к описанию в терминах средней плотности тока. Лагранжиан системы токов в слабо неоднородном магнитном поле. *Литература: Гл. 6 § 5-2.3*

Сила и момент сил, действующие на магнит-

ный диполь. Вывод уравнения движения системы как целого из лагранжиана. Условие адиабатичности. Прецессия магнитного момента во внешнем поле. Теорема Лармора. *Литература: Гл. 6 § 5-2.4*

Уравнения свободного электромагнитного поля; волновое уравнение. Плоская электромагнитная волна. Поперечность волны, две поляризации. Тензор

энергии-импульса волны, вектор Умова-Пойнтинга.

Плоская монохроматическая волна. Закон дисперсии. Типы поляризации волны: линейная, круговая, эллиптическая. Тензор энергии-импульса волны. Волновой вектор волны, его пропорциональность импульсу фотонов. Абберация света и эффект Доплера.

Преобразование Фурье. Дискретное преобразование Фурье на конечном отрезке; обратное преобразование Фурье. Переход к непрерывному преобразованию Фурье. Векторные операции div , grad , rot в Фурье-представлении. Разложение плоской волны по монохроматическим волнам.

Сферические волны. Уравнение на 4-потенциал в калибровке Лоренца для свободного поля. Волновое уравнение в сферических координатах. Сферические расходящаяся и сходящаяся волны.

Семинар 8

• **Задача 1:** Определите тензор энергии-импульса для стоячей линейно-поляризованной монохроматической электромагнитной волны (мгновенное значение и значение, усреднённое по периоду осцилляций). Предполагая, что стоячая волна ограничена плоскими зеркалами, найдите силу, с которой расталкиваются зеркала. Амплитуда колебаний электрического поля в волне равна E_0 .

Указание: Убедитесь, что давление может быть вычислено как сумма T^{zz} -компонент тензора энергии импульса двух бегущих волн (4.31) от и к поверхности зеркала с амплитудами $E_0/2$, где z — направление по нормали к зеркалу.

• **Задача 2:** Пусть одномерный волновой пакет линейно поляризованной волны $E(t, x)$ в момент времени $t = 0$ таков, что распределение амплитуд составляющих его гармоник имеет вид гауссового распределения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} E(t=0, x) = \tilde{E}_k(t=0) + \tilde{E}_{-k}(t=0),$$

$$\tilde{E}_k(t=0) = a_0 \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{k - k_0}{\Delta k}\right)^2\right),$$

где a_0 , k_0 , Δk — постоянные, а $\tilde{E}$ называется комплексной амплитудой. Найдите выражение для пакета в

Фурье представлении $E_{\omega, k}$; на плоскости ω - k постройте цветовой шкалой (яркость) $|E_{\omega, k}|$. Найдите форму волнового пакета в координатном пространстве $\tilde{E}(t, x)$. На одном графике постройте зависимости $E(t=0, x)$ и $2|\tilde{E}(t=0, x)|$, приняв, что $k_0 = 20 \cdot \Delta k$. Найдите связь между шириной пакета Δx и интервалом волновых чисел Δk , вносящих основной вклад в суперпозицию.

• **Задача 3:** Рассмотрите распространение гауссового аксиально симметричного линейно поляризованного монохроматического пучка (частота ω , направление распространения вдоль оси Oz). Гауссов пучок имеет плоский фронт на выходе испускающего его устройства, так что при $z = 0$ характеризуется поперечным профилем амплитуды волны $\exp(-\rho^2/2\sigma_0)$ с действительным σ_0 , где ρ — квадрат поперечной координаты. Сечение пучка велико по сравнению с квадратом длины волны, то есть величина $\sigma_0 \gg \lambda^2$. Найдите:

– Область в пространстве, где интенсивность пучка в поперечном направлении составляет не менее $1/e^2$ (e — показатель натуральной экспоненты) от её значения на оси $\rho = 0$ при том же значении продольной координаты z .

Литература: соответствующая задача из §??

Домашнее задание 8

• **Задача 4:** Однородно заряженный шарик радиуса a пролетает параллельно обкладкам плоского конденсатора через его центр. На влёте в конденсатор шарик вращается вокруг оси, нормальной к обкладкам конденсатора, с угловой скоростью ω (так что $a\omega \ll c$). Шарик преодолевает путь $2R$ между обкладок, после чего покидает конденсатор. Электрическое поле внутри конденсатора равно E . Скорость шарика v сравнима со скоростью света, его масса — m , полный заряд — q . Найдите изменение ориентации оси вращения шарика после пролёта через конденсатор (в системе движущейся вместе с шариком).

• **Задача 5:** Для задачи про гауссов пучок покажите, что на расстояниях, где пучок оказывается уже существенно уширенным, волновые фронты имеют сферическую форму. Где находится центр у этой сферы? Указание: волновой фронт — поверхность постоянной фазы; сферическая форма при малых углах раствора приближается параболой.

Неделя 9

Лекция 9

Запаздывающие потенциалы. Уравнение на 4-потенциал в калибровке Лоренца в присутствии поля. Понятие функции Грина. Запаздывающая функция Грина в координатно-временном представлении. Запаздывающие потенциалы, обсуждение общих свойств выражения. *Литература: Пункт 4-1.3, Пункт 6-2.1.1.*

Излучение точечного электро-диполя. Исследование поля во временно-пространственном представлении. Уравнение на 4-потенциал в калибровке Лоренца. Получение решения для 4-потенциала через использование запаздывающей функции Грина; запаздывающее время. Получение выражения для электромагнитного поля. Исследование выражения: ближнепольная и волновая зоны. Диаграмма направленности излучения. Поляризация излучения; её связь с пространственной структурой ближнего поля. Полная мощность излучения. *Литература: § 3.*

Семинар 9

• **Задача 1:** Два противоположных заряда $\pm q$ равномерно движутся по окружности радиуса a с угловой скоростью ω , находясь на противоположных сторонах окружности, так что $\omega \ll c/a$, где c — скорость света. Определите диаграмму направленности излучения такой системы и полную интенсивность излучения. Определите также поляризацию уходящего излучения.

Неделя 10

Лекция 10

Тормозное излучение. Сила радиационного трения. *Литература: Пункт 6-5.2.*

Магнитодипольное и квадрупольное излучения. Дальнейшее разложение по нерелятивистской скорости движения и малому размеру системы. *Литература: Пункт 4.*

Магнито-дипольное излучение. Выражения для электромагнитного поля вне магнитного диполя; сравнение с полем электро-диполя. Геометрическое пояснение диаграммы направленности излучения. *Литература: Пункт 6-4.1.*

Квадрупольное излучение. Формула для полной интенсивности излучения. Геометрические свойства диаграммы направленности излучения.

Семинар 10

• **Задача 1:** Два одинаковых заряда q совершают одинаковые гармонические колебания вдоль некоторого направления (одинаковые амплитуда a , частота ω и

• **Задача 2:** Показать, что в волновой зоне при Лоренцевой калибровке потенциалов скалярный потенциал ограниченной излучающей системы может быть выражен через векторный потенциал формулой $\varphi = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A})$.

Домашнее задание 9

• **Задача 3:** Нерелятивистский электрон движется по окружности в постоянном однородном магнитном поле $\mathbf{B}$. Найти закон изменения его кинетической энергии во времени $\mathcal{E}(t)$, учтя производимое электроном излучение. Найти траекторию электрона.

• **Задача 4:** Нерелятивистская частица с зарядом $-e$ и массой m движется в поле неподвижного точечного заряда Ze по круговой орбите. Найти уравнение траектории частицы с учётом производимого ею излучения.

• **Задача 5:** Используя выражение для запаздывающей функции Грина в частотно-пространственном представлении, найдите её во временно-пространственном представлении путём обратного преобразования Фурье. (Если же была получена функция Грина во временно-пространственном представлении, то найдите её в частотно-пространственном представлении и покажите, что она действительно удовлетворяет волновому уравнению, в котором произведена замена $\partial_t \rightarrow -i\omega$.)

положение равновесия), но смещённые по фазе на пол периода. Движение зарядов нерелятивистское. Найдите интенсивность излучения такой системы.

• **Задача 2:** Два одноименных заряда $(e_1, m_1; e_2, m_2; e_1 e_2 > 0)$ испытывают лобовое столкновение. Определить излученную энергию, если задана относительная скорость на бесконечности $v_\infty \ll c$. Рассмотреть случай $e_1/m_1 \neq e_2/m_2$.

• **Задача 3:** Рамочная антенна представляет собой квадратную рамку со стороной a , по которой течёт ток $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$. Определить среднюю интенсивность излучения антенны при условии, что $\omega a \ll c$.

• **Задача 4 (*):** Система движущихся зарядов представляет собой совпадающие в пространстве колеблющиеся вдоль разных направлений с одной и той же частотой ω точечные магнитный диполь $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 \cos(\omega t)$ и электрические диполь $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \cos(\omega t + \varphi)$ (т.н. источник Гюйгенса). Пользуясь соображениями симметрии и размерности, определите с точностью до числового коэффициента силу (усреднённую по периоду ко-

лебаний), которую надо прикладывать, чтобы удержать неподвижным эту систему движущихся зарядов.

Домашнее задание 10

• **Задача 5:** Два одноименных заряда ($e_1, m_1; e_2, m_2; e_1 e_2 > 0$) испытывают лобовое столкновение. Определить излучённую энергию, если задана относительная скорость на бесконечности $v_\infty \ll c$. Рассмотреть случай $e_1/m_1 = e_2/m_2$.

Неделя 11

Лекция 11

Частотное представление. Уравнение на 4-потенциалы в калибровке Лоренца в частотно-пространственном представлении. Волновое уравнение в Фурье-пространстве. Правило обхода полюсов для запаздывающей функции Грина; функция Грина во временно-волновом представлении. *Литература: § 2.*

Плотность и поток энергии волн. Выражения для плотности и потока энергии в терминах комплексных амплитуд. Спектр излучения, соотношение Парсевала. *Пункт 4-3.2, в частности Пункт 4-3.2.4*

Рассеяние света связанными и свободными зарядами. Уравнение движения связанного заряда в гармоническом потенциале под действием поля налетающей волны. Учёт радиационного трения; обсуждение условия применимости. Переход к комплексным амплитудам. Определение амплитуды дипольных колебаний. Излучение для линейно поляризованной падающей волны. Определение дифференциального и полного сечений рассеяния. *Сечение рассеяния в резонансе.*

Семинар 11

• **Задача 1:** Заряд, связанный в гармоническом потенциале, отклонён от положения равновесия на расстояние a и зафиксирован в этом положении. В некоторый момент заряд отпускают. Определите спектр излучения заряда к моменту, когда он уже практически остановился (амплитуда колебаний стала мала по сравнению с исходной). Масса заряда m , частота собственных колебаний ω_0 .

• **Задача 2:** Электромагнитная волна малой амплитуды ($eE_0/m\omega c \ll 1$) рассеивается на свободном нерелятивистском электроне. Вычислить среднюю за период волны силу, действующую на электрон.

• **Задача 3:** Используя выражение для функции

• **Задача 6:** Однородно заряженный шарик, имеющий массу m и заряд q , вращается с угловой скоростью $\omega \ll c/a$, где a — его радиус. Шарик находится в однородном магнитном поле. Ось вращения составляет угол ϑ с направлением магнитного поля. Найдите угловую диаграмму интенсивности излучения. Определите поляризацию волны, уходящей в направлении вдоль магнитного поля. Определите полную интенсивность излучения.

Грина в частотно-волновом представлении, путём обратного преобразования Фурье получите функцию Грина в частотно-координатном представлении.

• **Задача 4 (*):** Линейно поляризованная монохроматическая волна с частотой ω налетает на идеально проводящий шарик радиуса $a \ll c/\omega$. Определите полное сечение рассеяния волны на шарике.

• **Задача 5 (*):** Система движущихся зарядов представляет собой гармонически колеблющийся точечный диполь. Пользуясь соображениями симметрии и размерности, определите с точностью до числового коэффициента момент сил в единицу времени, который уносит с собой излучение, производимое диполем.

Домашнее задание 11

• **Задача 6:** Используя выражение для запаздывающей функции Грина во временно-волновом представлении, найдите её во временно-координатном представлении путём обратного преобразования Фурье.

• **Задача 7:** Перепишите выражения для электромагнитного поля через 4-потенциал в частотно-пространственном представлении.

• **Задача 8:** Запишите выражения для электромагнитного поля для точечного изменяющегося во времени диполя (неподвижного в пространстве) в частотно-пространственном представлении, используя решение для 4-потенциала.

• **Задача 9:** Определить частоту ω_r света, рассеянного движущимся зарядом со скоростью v , в зависимости от направления рассеяния. Волновой вектор рассеивающейся световой волны равен $\mathbf{k}$. Считать, что в системе отсчёта, где электрон покоится, энергия квантов света (фотонов) мала по сравнению с его массой покоя.

Неделя 12

Лекция 12

Поле точечных зарядов. Запаздывающие потенциалы Лиенара-Вихерта (вывод через лоренц-инвариантность). Литература: § 1.

Электромагнитное поле равномерно движущегося заряда; анализ выражения. Литература: Пункт 6-1.3.

Поле ускоренно движущегося заряда. Сравнение углового распределения радиационной части поля с задачами о распаде движущейся частицы.

Магнитотормозное излучение. Мощность излучения, производимого релятивистским ускоренно движущимся зарядом. Некогерентное излучение многих зарядов. Пределы применимости. Движение в магнитном поле. Оценка характерной длины волны излучения. Литература: Пункт 6-5.1.

Семинар 12

• **Задача 1:** Используя выражение для запаздывающих потенциалов Лиенара-Вихерта, покажите, что в пределе медленного движения частицы эти потенциалы дают поле излучения диполя.

• **Задача 2:** Найти энергию излучения релятивистского электрона в однородном магнитном поле за один оборот. Найти мощность синхротронного излучения в ускорителе на встречных пучках электронов и позитронов с энергией 100 ГэВ. Длина окружности ускорителя 30 км, число ускоряемых частиц в кольце — $5 \cdot 10^{12}$.

Оценить характерную длину волны излучения.

• **Задача 3:** Релятивистский электрон пролетает со скоростью V через плоский конденсатор, к которому приложено переменное электрическое поле с частотой ω_0 . Найти частоту излучения электрона в зависимости от угла θ между наблюдателем и направлением движения электронного пучка.

• **Задача 4:** Частица с зарядом e движется с релятивистской скоростью v в поле плоской монохроматической волны, распространяющейся в направлении n . Плотность ϵ волны известна. Найти среднюю за период волны силу, действующую на частицу.

Домашнее задание 12

• **Задача 5:** Для релятивистского электрона, движущегося в однородном магнитном поле, найдите закон изменения его энергии и радиуса его орбиты со временем за счёт потерь на излучение. Направление движения электрона перпендикулярно магнитному полю.

• **Задача 6:** Один электрон неподвижный, а другой пролетает мимо него с релятивистской скоростью на прицельном расстоянии ρ на столько большом, что его траекторию можно считать прямой линией. Чему равна Лэнгмювская сила, действующая на покоящийся электрон? Оцените время, в течение которого на него действует сила, сравнивая с Лэнгмювским значением.

Контрольная №2

Часть I

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Глава 1

ЧЕТЫРЁХ-МЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ

1	Постулаты релятивистской механики	17
1.	<i>Недостаточность галилеевской механики и необходимость новой теории</i>	17
2.	<i>Постулаты специальной теории относительности</i>	18
3.	<i>Принцип минимума действия</i>	19
4.	<i>Встроенные противоречия классической теории поля и её связь с квантовой теорией</i>	20
2	Инерциальные системы координат	20
1.	<i>Инерциальные декартовы системы координат</i>	20
2.	<i>Движение свободного тела в инерциальной системе отсчёта</i>	21
3.	<i>Задачи</i>	22
3	Преобразование Лоренца	22
1.	<i>Количество параметров преобразования Лоренца</i>	23
2.	<i>Интервал в пространстве Минковского</i>	23
3.	<i>Задачи</i>	24
4	Преобразование Лоренца: лоренцевский буст	25
1.	<i>Скорость движения и быстрота</i>	25
2.	<i>Поворот в пространстве</i>	26
5	Неравномерное движение материальной точки	27
1.	<i>Мировая линия частицы</i>	27
2.	<i>Собственное время</i>	27
3.	<i>Сложение скоростей</i>	28
6	Описание движения частиц в терминах непрерывной среды	28
1.	<i>Четырёх-мерный ток</i>	29
2.	<i>Связь потока с траекториями частиц</i>	30
3.	<i>Распределение частиц по скоростям</i>	31
4.	<i>Задачи</i>	31

§1.1. Постулаты релятивистской механики

1-1.1 Недостаточность галилеевской механики и необходимость новой теории

Независимость вида математической записи законов физики относительно выбора инерциальной системы отсчёта должна предполагаться в любой физической теории. Если же все системы отсчёта принципиально одинаковы, то нет выделенной, а значит вопрос об абсолютной скорости тела бессмысленен. А. Пуанкаре в начале XX века сформулировал это интуитивное соображение так: в природе есть закон, заключающийся в том, что абсолютную скорость обнаружить невозможно никаким способом. Поэтому актуальным является только вопрос о том, как преобразуется математическое описание физических систем, когда мы изменяем систему отсчёта. Ответ на этот вопрос неразрывно связан с видом уравнений движения материи.

Первый закон Ньютона утверждает, что свободное тело, пущенное с любой скоростью в любом направлении, должно двигаться равномерно и прямолинейно в любой инерциальной системе координат. Следовательно, координаты для любых двух инерциальных прямоугольных декартовых систем связаны между собой некоторым линейным преобразованием. В этом утверждении не было бы ничего требующего задуматься, если бы речь шла только о 3-х пространственных координатах; тогда множество допустимых линейных преобразований ограничивалось бы ортогональными поворотами.

Однако в этих общих рассуждениях о линейном преобразовании может участвовать ещё одна координата — время, и всё равно прямолинейное движение будет оставаться прямолинейным в новой системе отсчёта. Понятно, что время должно быть всё же логически отделено. Необходимы дополнительные физические соображения, которые бы выделили допустимую подгруппу линейных

преобразований всех 4-х координат. Как оказывается, для разных физических моделей ответ оказывается различным.

В классической механике максимальная относительная скорость движения двух тел может быть сколь угодно большой. Поэтому в ней рассматривалось всего два типа взаимодействия. Первое — гравитационное взаимодействие двух материальных точек, сформулированное И. Ньютоном. Считалось, что это взаимодействие распространяется с бесконечной скоростью, то есть определяется текущим положением тел. Второе — это близкое взаимодействие двух абсолютно недеформируемых (абсолютно твёрдых) тел конечного размера, когда они приходят в соприкосновение. По определению, при воздействии на абсолютно твёрдое тело конечного размера в одной его точке все другие его точки в этот же момент начинают испытывать ускорение, определяемое ускорением центра масс и угловым ускорением тела. Таким образом, здесь также встроено представление о бесконечной скорости распространения взаимодействия.

Математическое описание этих двух взаимодействий по форме остаётся тем же самым при переходе из одной инерциальной системы координат в другую, если предположить, что координаты этих систем связаны между собой преобразованием Галилея. Пусть $\mathbf{v}$ — скорость системы K' относительно системы K . Преобразованием Галилея является

$$t' = t, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t, \quad (1.1)$$

где $t, \mathbf{r}$ и $t', \mathbf{r}'$ — координаты одной и той же материальной точки в инерциальных системах K и K' соответственно. Если законы физики инвариантны относительно преобразований вида (1.1), то говорят о галилеевской инвариантности. О механике в этом случае говорят как о *классической* или *галилеевской механике*. Время при преобразовании Галилея остаётся неизменным, и потому носит абсолютный характер.

Во второй половине XIX века Д.К. Максвелл сформулировал уравнения электродинамики в пустоте. Из этих уравнений может быть получено волновое уравнение, которое описывает распространение света. Проблема заключалась в том, что уравнения Максвелла не обладают галилеевской инвариантностью. Наоборот, согласно уравнениям Максвелла электромагнитная (световая) волна в любой инерциальной системе координат распространяется с одной и той же скоростью, равной константе c . Численное значение этой константы равно

$$c = 299\,792\,458 \text{ м/с}.$$

Из этого факта следует общее ограничение: любое массивное тело может двигаться только со скоростью, меньшей скорости света. Действительно, в противном случае в системе отсчёта этого тела световая волна должна быть неподвижна, если тело движется со скоростью света по направлению распространения волны. Итак, *скорость c — максимальная скорость распространения*

взаимодействия, а любое массивное тело может двигаться только со скоростью, меньшей c .

Для восстановления инвариантности уравнений физики при переходе из одной инерциальной системы координат в другую следовало отказаться от преобразования Галилея в пользу другого линейного преобразования координат. Такое преобразование предложил Х.А. Лоренц (поэтому оно носит его имя), но окончательно обдумал этот факт и сформулировал готовую теорию специальной теории относительности (СТО) А. Эйнштейн в 1905 году. В этой теории два события, одновременные в одной системе координат, но разнесённые по пространству, в общем случае не являются одновременными в другой системе координат. Понятие времени стало относительным. Поэтому новую теорию стали называть *теорией относительности* (*theory of relativity*), построенную на её основе механику стали называть *релятивистской механикой*.

Тем не менее, при замене преобразования Галилея преобразованием Лоренца возникала новая проблема: теперь мгновенно распространяющееся гравитационное взаимодействие не могло быть органично включено в общефизическую картину. Процесс создания общей теории относительности (ОТО), включающей в себя и гравитацию (гравитационное взаимодействие теперь также принималось распространяющимся с конечной скоростью — со скоростью света), был завершён в 1916 году, где лидером также оказался А. Эйнштейн.

1-1.2 Постулаты специальной теории относительности

Упомянем сначала базовые постулаты, которые лежат в основе всех физических теорий.

Все физические явления описываются математическими законами. Не существует явлений материального мира, которые не могли бы быть описаны математической моделью.

Принцип причинности. Этот принцип утверждает, что какое-либо событие, произошедшее в любой время в любой точке, может повлиять только на то, что будет после этого события. В такой форме этот принцип ещё не формализован, при построении конкретной теории его надо доопределять.

Теперь перейдём к конкретной теории. Сейчас мы ограничиваемся специальной теорией относительности (СТО), в которой не рассматривается гравитация. Для расширения теории до общей теории относительности, включающей гравитацию, необходимо добавить новые постулаты и модифицировать часть постулатов СТО.

1-1.2.1 Базовые понятия в релятивистской механике

Свободное тело Будем говорить, что тело представлено самому себе, или называть его свободным те-

лом, если оно находится на значительном расстоянии от других тел, так что его взаимодействием с этими другими телами можно пренебречь.

Инерциальная система отсчёта Инерциальной системой отсчёта называется система отсчёта, в которой тело, предоставленное самому себе, движется равномерно и прямолинейно.

Четырёх-мерное пространство-время Мы будем изучать движение тел и распространение волн в 4-мерном пространстве времени. Четыре измерения складываются из одного, соответствующего времени, и трёх, соответствующих обычному наблюдаемому пространству.

Событие Событием мы будем называть точку в четырёх-мерном пространстве-времени.

Событие фиксирует место и время.

1-1.2.2 Постулаты, касающиеся свойств пространства

Эти постулаты переходят в релятивистскую механику из классической механики.

- Пространство и время однородны: физические процессы в замкнутой системе не зависят от её местоположения в пространстве и во времени.
- Пространство изотропно: физические процессы в замкнутой системе не зависят от её ориентации в пространстве.

1-1.2.3 Постулаты, касающиеся инерциальных систем отсчёта

- Равноправие инерциальных систем отсчёта.

Во всех инерциальных системах отсчёта физические законы выглядят одинаково, то есть одинакова их математическая запись.

- Ограниченность максимальной скорости.

Существует максимальная скорость движения или передачи сигнала в пространстве. Из предыдущего постулата следует, что она одна и та же во всех инерциальных системах отсчёта. Эту максимальную скорость мы будем называть

скорость света: c .

С максимальной скоростью c распространяется, в частности, свет в вакууме.

Второй постулат является новым с точки зрения классической механики.

1-1.3 Принцип минимума действия

Ньютонова механика формулировалась, исходя из постулирования уравнений движения. В дальнейшем было показано, что уравнения движения могут быть получены из принципа минимума действия.

Построение обновлённой теории предпочтительней начинать непосредственно с определения действия и затем находить уравнения движения путём его минимизации. Соображения для такого выбора следующие. По смыслу, действие есть величина, не зависящая от выбора системы координат, или, как говорят, являющаяся релятивистским инвариантом. А именно, фиксированной траектории частицы действие ставит в соответствие одно и то же число независимо от выбора системы координат. Уравнения движения не обладают этим простым свойством. Хотя они и имеют одинаковый математический вид во всех системах отсчёта, но конкретные значения величин в уравнении движения разумеется зависят от выбора системы координат.

Общие принципы построения действия для описания лагранжевой системы в специальной теории относительности (СТО) следующие:

- Действие должно являться релятивистским инвариантом, то есть его значение для конкретной траектории системы не должно зависеть от выбора системы координат;
- Действие должно иметь максимально простой вид, который, тем не менее, должен содержать в себе всю необходимую физику.
- Согласно принципам построения лагранжиана в классической механике, в лагранжиан не должны входить производные от координат (включая время) более чем первого порядка.

Преобразование Лоренца перемешивает между собой временную и пространственные компоненты. Поэтому производные по времени и по координате должны входить в действие симметричным образом.

1-1.3.1 Поле и материальные точки в классической теории поля

В релятивистской теории не могут рассматриваться абсолютно твёрдые тела, поскольку абсолютно твёрдое тело предполагает бесконечную скорость распространения сигнала по этому телу. Поэтому массивные частицы могут рассматриваться только как материальные точки. Для материальной частицы действие должно быть интегралом по той части пространства-времени, где существует частица. То есть, действие должно быть интегралом вдоль траектории частицы.

В специальной теории относительности получает самостоятельный смысл концепция поля. Если в ньютоновской механике взаимодействие передавалось непосредственно от одного тела к другому, а понятие поля могло рассматриваться только как вспомогательное, то

в релятивистской механике поле приобретает собственное существование, вообще говоря независимое от частиц. Частица взаимодействует непосредственно только с полем в точке, где она находится. Взаимодействие с другими частицами происходит посредством распространяющегося поля: сначала одна частица создаёт изменение поля; после этого поле распространяется от этой частицы к другой со скоростью, не превышающей скорость света; затем та другая частица начинает испытывать воздействие пришедшего к ней изменённого поля. Действие для поля должно быть интегралом по всему пространству-времени от плотности лагранжиана поля.

Принцип построения действия при существовании различных частей системы состоит в том, что действие есть арифметическая сумма разных вкладов. Есть вклады, которые отвечают за движение отдельных частей – частиц и поля – самих по себе, а есть вклады, которые отвечают за взаимодействие этих частей.

1-1.4 Встроенные противоречия классической теории поля и её связь с квантовой теорией

Большинство точечных частиц помимо массы обладают также электрическим зарядом. Заряд частицы ин-

дуцирует электрическое поле, в результате чего полная энергия покоящейся частицы складывается из её энергии покоя, связанной с массой, и энергией электрического поля. Поскольку электрическое поле распределено по закону Кулона, то электрическая часть энергии оказывается формально бесконечной для точечной частицы – интеграл по пространству от объёмной плотности энергии электрического поля расходится на малых расстояниях от частицы.

Эта бесконечность проявляется в конкретных вычислениях при исследовании задачи об излучении ускоренно движущейся частицей электромагнитных волн. Можно подвести полный баланс сохранения энергии только между моментами, когда частица движется равномерно и прямолинейно. Однако пока она движется с ускорением, установить полный баланс энергии оказывается невозможным, поскольку в уравнении на баланс присутствует бесконечная добавка от энергии поля точечного заряда.

Выход из этого даёт квантовая теория, согласно которой массивные частицы описываются волновой функцией, имеющей конечный размер локализации. Если плотность заряда остаётся конечной во всех точках пространства, то электромагнитная энергия становится ограниченной по величине.

§1.2. Инерциальные системы координат

Основы тензорного анализа, свойства трёхмерного евклидова пространства и 4-х мерного пространства Минковского даны в Главе 8. Здесь мы предполагаем, что читатель знаком с этим математическим аппаратом.

1-2.1 Инерциальные декартовы системы координат

Пусть в инерциальной системе отсчёта K задана декартова система координат. Пространственные координаты мы обозначаем

$$x^i \equiv r^i, \quad \{i, j, k, l, \dots\} = 1, 2, 3 \quad \text{или} \quad x, y, z.$$

Выше в § 1 говорилось о том, что переход от одной инерциальной системы координат к другой должен соответствовать линейному преобразованию координат. Если при этом линейном преобразовании время оставить неизменным, то мы получим преобразование Галилея (1.1). Для того, чтобы построить новую теорию, время надо включить наравне с пространственными координатами в качестве одной из компонент полного 4-вектора, определяющего событие — место и время. Мы будем следовать традиции, в которой время t пропорциональна координате x^0 на нулевой оси декартовой системы ко-

ординат,

$$x^0 \equiv ct,$$

где c – скорость света. Весь 4-вектор мы будем обозначать

$$x^\mu, \quad \{\mu, \nu, \lambda, \dots\} = 0, 1, 2, 3.$$

Если нам потребуется отделить временную (нулевую) координату от пространственных (трёх последних), то мы это будем обозначать следующим образом:

$$x \equiv \|x^\mu\| = \{ct, \mathbf{r}\}.$$

Мы будем отождествлять понятие декартовой системы координат и инерциальной системы отсчёта.

1-2.1.1 Интервал

Возьмём два события A и B с координатами

$$A: x^\mu, \quad B: x^\mu + dx^\mu \quad (1.2a)$$

соответственно. По определению, интервалом между этими двумя событиями называется величина

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2 = \\ &= (dx^0)^2 - \left((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \right) \end{aligned}$$

Если световой луч прошёл через оба события A и B (1.2a), это означает, что интервал между ними равен нулю,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2 = 0. \quad (1.2b)$$

Это равенство должно выполняться в любой системе координат, поскольку свет в пустоте распространяется всегда с фиксированной скоростью c .

1-2.1.2 Метрический тензор

Более кратко определение интервала можно записать в виде

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx^\mu dx_\mu, \quad (1.2c)$$

где по повторяющимся индексам происходит суммирование от 0 до 3. Так построенный метрический тензор $g_{\mu\nu}$ представляет собой диагональную матрицу,

$$\|g_{\mu\nu}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Сигнатура метрического тензора показывает, что 4-х мерное пространство-время является пространством Минковского.

Ниже в Пункте 1-3.2 показывается, что из постулатов специальной теории относительности вытекает, что $g_{\mu\nu}$, будучи преобразованным как ковариантный тензор второго порядка, не изменяться при переходе в любую другую инерциальную систему координат, т.е. действительно является метрическим тензором. В этом параграфе мы непосредственно не используем это свойство $g_{\mu\nu}$.

1-2.2 Движение свободного тела в инерциальной системе отсчёта

Движение свободного массивного тела в инерциальной системе отсчёта представляет собой прямую линию, так что его координаты могут быть представлены в параметрическом виде:

$$x^\mu(s) = u^\mu s + x^{\mu,0}, \quad (1.2d)$$

где u^μ и $x^{\mu,0}$ не зависят от параметра вдоль линии s . Параметры $x^{\mu,0}$ задают начальное положение тела.

Определим, чему равна скорость частицы, двигающейся по прямой (1.2d). Для этого определим малое смещение частицы вдоль прямой:

$$dx^\mu = u^\mu ds. \quad (1.2e)$$

Компоненты трёхмерной скорости тела $\mathbf{v}$ равны

$$v^i = c \frac{dx^i}{dx^0} = c \frac{u^i}{u^0}, \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}}{u^0}, \quad (1.2f)$$

где $\|p^\mu\| = \{u^0, \mathbf{u}\}$. Отсюда мы можем сделать вывод, что 4-вектор u^μ хотя и имеет 4 координаты, однако в действительности в нём содержится только 3 независимых физически значимых параметра, определяющих направление и скорость движения частицы в 3-х мерном пространстве. Иными словами, для определения линии в 4-х мерном пространстве достаточно указать только её направление (и исходную точку, разумеется).

1-2.2.1 4-скорость тела

С любым массивным телом может быть связана инерциальная система координат, в которой это тело, по определению, покоится. Поэтому массивное тело может двигаться только со скоростью, меньшей скорости света, $v < c$ в (1.2f). В противном случае, если представить массивную частицу, двигающуюся со скоростью света, то свет, испущенный в направлении движения частицы, в её системе отсчёта оказался бы покоящимся.

Для массивного тела, движущегося всегда со скоростью меньше световой, возможно так перемасштабировать параметр s в (1.2d), чтобы его приращение имело смысл интервала s (1.2c) между двумя событиями на мировой линии частицы. Из цепочки равенств

$$\begin{aligned} s^2 &= (s_2 - s_1)^2 = \\ &= g_{\mu\nu} (x^\mu(s_2) - x^\mu(s_1)) (x^\nu(s_2) - x^\nu(s_1)) = \\ &= g_{\mu\nu} u^\nu u^\mu (s_2 - s_1)^2, \end{aligned} \quad (1.2g)$$

вытекает, что 4-вектор u^μ в (1.2d) должен быть нормирован на единицу,

$$u^\mu u_\mu = 1. \quad (1.2h)$$

В этом случае этот вектор называется вектором 4-вектором скорости.

1-2.2.2 Связь 4-скорости с трёх-мерными обозначениями

Пусть частица массивна, так что её свободному движению можно поставить в соответствие 4-скорость u^μ . Введём безразмерную трёх-мерную скорость

$$\beta^i = \frac{v^i}{c} = \frac{u^i}{u^0}, \quad \beta^2 < 1 \quad (1.2i)$$

Неравенство в (1.2i) выражает то, что массивная частица движется со скоростью, меньшей скорости света. Кроме того, определим параметр

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \geq 1, \quad (1.2j)$$

называемый γ -фактором. Тогда 4-скорость можно записать в виде

$$\|u^\mu\| = \left\{ \gamma, \gamma \frac{\mathbf{v}}{c} \right\} \equiv \{\gamma, \gamma \beta\}. \quad (1.2k)$$

Если частица движется с малой скоростью, так что $v \ll c$, то такая частица называется *нерелятивистской*. Для нерелятивистской частицы

$$\|u^\mu\| \approx \left\{ 1 + \frac{v^2}{2c^2}, \frac{v}{c} \right\}. \quad (1.2l)$$

В противном случае, когда её скорость v сравнима со скоростью света c , частица называется *релятивистской*. Если γ -фактор велик, $\gamma \gg 1$, то такую частицу называют *ультрарелятивистской*.

1-2.2.3 4-импульс материальной точки

Вектор 3-х мерной скорости $\mathbf{v}$ материальной точки направлен по касательной к траектории $\mathbf{r}(t)$. При этом 3-х мерный импульс этой материальной точки (тела) также является касательным вектором к траектории, будучи пропорционален скорости, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, где коэффициент пропорциональности m — масса тела.

Обобщим эту картину на релятивистский случай. Вместо касательной к траектории $\mathbf{r}(t)$ теперь естественно рассмотреть касательную к её траектории в пространстве-времени (1.2d), которая направлена вдоль 4-скорости u^μ (1.2h). Если принять, что 4-импульс $\|p^\mu\| = \{p^0, \mathbf{p}\}$ связан с 4-скоростью законом пропорциональности

$$p^\mu = mc u^\mu, \quad (1.2m)$$

то согласно (1.2k) пространственная часть 4-импульса

будет равна

$$\mathbf{p} \approx m\mathbf{v} \quad (1.2n)$$

для медленных (нерелятивистских) частиц, как и должно быть. В общем случае условие нормировки 4-скорости (1.2h), выраженное в терминах импульса, есть

$$(p^0)^2 - \mathbf{p}^2 = (mc)^2. \quad (1.2o)$$

Физический смысл нулевой компоненты p^0 4-импульса мы обсудим позже.

1-2.2.4 Безмассовые частицы

Если скорость частицы равна скорости света, то ввести 4-скорость согласно нормировке (1.2h) невозможно, поскольку в этом случае интервал между двумя любыми точками на траектории частицы (1.2d) равен нулю. Иными словами,

$$p^\mu p_\mu = 0, \quad \Leftrightarrow \quad (p^0)^2 - \mathbf{p}^2 = 0. \quad (1.2p)$$

1-2.3 Задачи

• **Задача 1:** Найдите матрицу $\|g^{\mu\nu}\|$ (матричные элементы), обратную матрице метрического тензора $\|g_{\mu\nu}\|$.

• **Задача 2:** Может ли квадрат интервала $(\Delta s)^2$, разделяющий два события, быть отрицательным? Если да, приведите пример — то есть пример координат таких двух событий.

§1.3. Преобразование Лоренца

Пусть даны две инерциальные системы координат K и K' , а координаты некоторого тела в этих системах отсчёта равны x^μ и x'^μ . Эти координаты должны быть связаны между собой линейным соотношением

$$x'^\nu = \Lambda'^\nu_\mu x^\mu + x'^{\nu,0}, \quad (1.3a)$$

в котором матрица Λ'^ν_μ характеризует относительные движение и ориентацию систем отсчёта K и K' , а вектор $x'^{\nu,0}$ — их относительное расположение. Действительно, свободное тело должно двигаться прямолинейно (то есть двигаться равномерно в пространстве со временем) в обеих системах координат. Равномерное и прямолинейное движение задаётся видом (1.2d). Только линейное преобразование (1.3a) обеспечивает преобразование любой прямой линии в прямую линию.

Из сформулированных постулатов классической теории относительности следует, что матрица перехода $\hat{\Lambda}$, описывающая в (1.3a) переход из одной системы координат в другую, должна удовлетворять равенству

$$g_{\mu\nu} = g_{\sigma\varsigma} \Lambda'^\sigma_\nu \Lambda'^\varsigma_\mu, \quad \Rightarrow \quad \text{abs}(\det \|\Lambda'^\sigma_\nu\|) = 1, \quad (1.3b)$$

т.е. сохранять метрический тензор. Матрица $\hat{\Lambda}$, удовлетворяющая уравнению (1.3b), называется матрицей Лоренца, а преобразование координат, которое она осуществляет, называется преобразованием Лоренца.

Доказательство верности (1.3b) основывается на постулате о независимости скорости распространения света от выбранной системы координат, см. (1.2b). Таким образом, ограничение на матрицу преобразования Лоренца (1.3b) является математическим выражением введённого постулата релятивистской механики.

Доказательство инвариантности метрического тензора.

Установим ограничения, накладываемые на матрицу перехода $\hat{\Lambda}$ (1.3a) постулатами теории относительности, т.е. докажем (1.3b).

Для этого рассмотрим два события A и B , таких, что свет, испущенный из A , как раз приходит в B . Это означает, что интервал между этими двумя событиями равен нулю, см. (1.2c). Пусть события A и B ,

в системах отсчёта K и K' имеют координаты

$$\begin{aligned} K: & \quad A: x^\mu \quad \text{и} \quad B: x^\mu + dx^\mu \\ K': & \quad A: x'^\mu \quad \text{и} \quad B: x'^\mu + dx'^\mu. \end{aligned}$$

Переход из системы K в систему K' осуществляется при помощи матрицы $\hat{\Lambda}$ (1.3a),

$$dx'^\mu = \Lambda'^\mu_\nu dx^\nu.$$

Запишем условие равенства нулю интервала между A и B в обеих системах отсчёта:

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0, \quad (1.3c)$$

$$(ds')^2 = g_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = G_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0, \quad (1.3d)$$

$$G_{\mu\nu} = \Lambda'^\sigma_\mu \Lambda'^\tau_\nu g_{\sigma\tau}.$$

Метрический тензор $\|G_{\mu\nu}\|$ есть метрический тензор системы K' , пересчитанный в системе K . Для каждого dx^μ , для которого выполняется (1.3c), должно выполняться и равенство (1.3d).

Покажем, что из этого требования следует пропорциональность

$$G_{\mu\nu} \propto g_{\mu\nu} \quad (1.3e)$$

между матрицами. Заметим сразу, что матрица $G_{\mu\nu}$ симметрична в силу своего построения. Далее, поскольку равенство (1.3c) сохраняется при заменах

$$\{dx^i \rightarrow -dx^i, \quad dx^0 \rightarrow dx^0\},$$

$$\{dx^i \rightarrow \mathcal{O}^i_j dx^j, \quad dx^0 \rightarrow dx^0\},$$

где $\hat{\mathcal{O}}$ – ортогональная матрица, то, во-первых матричные элементы G_{0i} равны нулю, а во-вторых, сектор G_{ij} пропорционален единичной матрице. Из последнего вытекает пропорциональность (1.3e).

Осталось показать, что коэффициент пропорциональности тождественно равен единице. Мы уже выполнили условие сохранения нулевого значения интервала, поэтому следует воспользоваться дополнительными соображениями.

Абсолютное значение детерминанта метрического тензора $\|G_{\mu\nu}\|$ равно квадрату детерминанта матрицы Лоренца $\|\Lambda'^\mu_\nu\|$. Поэтому нам надо показать, что абсолютное значение детерминанта матрицы Лоренца равно единице. Пусть

$$(\det \|\Lambda'^\mu_\nu\|)^2 = a.$$

Коэффициент a может зависеть только от абсолютного значения v взаимной скорости $\mathbf{v}$ движения систем координат K' и K . В противном случае нарушится постулат об изотропности пространства. Рассмотрим теперь ещё одну систему координат K'' , которая движется относительно системы K' со скоростью $\mathbf{v}'$, по

модулю равной v , а относительно системы K — со скоростью $\mathbf{v}''$. Переходя сначала непосредственно из K в K'' , а потом через систему K' , получаем равенство:

$$a(v'') = a(v) a(v').$$

Зафиксируем теперь величину скоростей v, v' , и будем менять угол между скоростями $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$, тем самым меняя абсолютное значение скорости v'' . При этом единственным способом сохранить верность выписанного равенства является тождественное равенство $a = 1$.

Таким образом, доказано равенство (1.3b).

1-3.1 Количество параметров преобразования Лоренца

Пусть матрица преобразования Лоренца $\hat{\Lambda}$ слабо отличается от тождественного преобразования,

$$\Lambda'^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \epsilon \Omega^\mu_\nu, \quad \epsilon \rightarrow 0. \quad (1.3f)$$

После приравнивания нулю коэффициента при первой степени ϵ в уравнении (1.3b) получаем, что матрица $\hat{\Omega}$ должна удовлетворять уравнению

$$\Omega_{\mu\nu} + \Omega_{\nu\mu} = 0.$$

Таким образом, в матрице $\hat{\Omega}$ содержится 6 независимых параметров.

Совершая переход $1/\epsilon$ раз и устремляя $\epsilon \rightarrow 0$, получаем конечное преобразование Лоренца

$$\hat{\Lambda}' = \exp(\|\Omega^\mu_\nu\|). \quad (1.3g)$$

Матрица Лоренца, которую можно представить в виде (1.3g), соответствует переходу между системами координат, у которых время течёт в одну сторону, т.е. $\Lambda^0_0 > 0$, а пространственные оси в обеих системах отсчёта образуют однонаправленную тройку координат.

Число шесть непрерывных параметров в матрице Лоренца можно интерпретировать следующим образом: три параметра суть углы Эйлера, описывающие произвольный поворот пространственных осей одной системы относительно пространственных осей другой системы; остальные три параметра суть три компоненты скорости относительного движения систем координат.

Все остальные матрицы Лоренца, не представимые в виде (1.3g), можно получить из (1.3g) путём умножения её на матрицы, соответствующие обращению времени или пространственной инверсии. Таким образом, вся совокупность матриц Лоренца параметризуется 6-ю непрерывными параметрами и двумя дискретными.

1-3.2 Интервал в пространстве Минковского

Итак, из постоянства скорости света в любой инерциальной системе координат следует, что при преобразовании Лоренца сохраняется метрический тензор $g_{\mu\nu}$. Из сохранения метрического тензора в свою очередь следует,

что при преобразовании Лоренца сохраняет своё значение интервал (1.2с) между любыми двумя событиями. О таких величинах говорят как о *релятивистских инвариантах*. Для того, чтобы обозначить их причастность к системе тензорного исчисления, см. §§1,3, такие величины называют также *скалярами*.

Метрический тензор $g_{\mu\nu}$ не знакоопределённый, что отличает его от евклидовой метрики, которая определяет расстояние между двумя точками. Метрику (1.2с) называют *метрикой Минковского*, а линейное пространство, в котором введена такая метрика – *пространством Минковского*. При ортогональном повороте в пространстве Евклида расстояние, вычисленное по единичной метрике, сохраняется. Поэтому можно сказать, что преобразование Лоренца совершает поворот в пространстве Минковского. Аналогия с метрикой Евклида не полная: метрика Минковского в силу своей знакоопределённости не обладает свойством нормы (т.е. неравенство треугольника в общем случае не выполняется), тогда как метрика Евклида свойством нормы обладает, см. (8.29).

1-3.2.1 Времене-подобные интервалы

Если интервал (1.2с) между событиями (1.2а) имеет положительное значение,

$$(ds)^2 > 0,$$

то такой интервал называется *времене-подобным*. Существует система координат, в которой у 4-вектора dx^μ ненулевой является только временная компонента,

$$dx^0 = \sqrt{ds^2}, \quad dx^i = 0,$$

то есть эти события A и B происходят в одной и той же точке пространства, но в разное время. Как найти такую систему координат, станет понятно в § 4, где рассматривается лоренцевский буст.

1-3.2.2 Пространственно-подобные интервалы

Если интервал (1.2с) между событиями (1.2а) имеет отрицательное значение,

$$(ds)^2 < 0,$$

то такой интервал называется *пространственно-подобным*. Существуют системы координат, в которых у 4-вектора dx^μ временная компонента является нулевой, а пространственная часть имеет ненулевые компоненты

$$dx^0 = 0, \quad |r| = \sqrt{-(ds)^2},$$

то есть события A и B происходят одновременно, но в разных точках пространства.

Примеры 4-векторов, которым соответствуют времене- и пространственно-подобные интервалы, изображены ниже на Рисунке 1.3.

1-3.3 Задачи

• **Задача 1:** Пусть в некоторой инерциальной системе отсчёта одно событие произошло в момент времени 0, и в точке $\{0, 0, 0\}$, а другое событие произошло в момент времени 10 сек и в точке $\{10^{10}_M, 0, 0\}$. С какой скоростью должна двигаться вторая система отсчёта относительно исходной, чтобы в этой новой системе отсчёта эти два события были одновременными? Какое расстояние будет разделять события в новой системе координат?

• **Задача 2:** Пусть в некоторой инерциальной системе отсчёта одно событие произошло в момент времени 0, и в точке $\{0, 0, 0\}$, а другое событие произошло в момент времени 100 сек и в точке $\{10^{10}_M, 0, 0\}$. С какой скоростью должна двигаться вторая система отсчёта относительно исходной, чтобы в этой новой системе отсчёта эти два события произошли в одной точке пространства? Какое время будет разделять это события в новой системе координат?

• **Задача 3:** Частица двигалась равномерно и прямолинейно время T со скоростью v . Какое время в процессе её этого движения набегало на её собственных часах?

• **Задача 4:** В системе отсчёта, которая движется со скоростью V вдоль Ox лабораторной системы координат, движется частица со скоростью u вдоль этой же оси Ox . С какой скоростью движется частица в лабораторной системе координат? Получить ответ сначала в терминах быстроты, для которой закон сложения скоростей есть просто арифметический закон сложения.

• **Задача 5:** Две частицы движутся друг на встречу другу со скоростями $c/2$, где c — скорость света. С какой скоростью вторая частица приближается к первой в системе координат, где первая частица покоится?

• **Задача 6:** Две частицы движутся в ортогональных направлениях со скоростями $c/2$, где c — скорость света. С какой скоростью вторая частица приближается к первой в системе координат, где первая частица покоится?

§1.4. Преобразование Лоренца: лоренцевский буст

Наиболее известным частным видом преобразования Лоренца является случай, когда системы отсчёта K и K' имеют попарно параллельные друг другу пространственные оси координат, и K' движется относительно K со скоростью V , направленной вдоль оси Ox , см. Рисунок 1.1. Примем также для простоты, что начала систем координат совпадают, т.е. в (1.3a) $x^{\nu,0} = 0$.

В выбранном случае координаты y, z не изменяются при смене системы координат, поэтому матрица преобразования Лоренца является блочно-диагональной,

$$\|\Lambda'^\mu_\nu\| = \begin{pmatrix} \hat{\lambda} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \quad (1.4a)$$

где в выражении для матрицы $\|\Lambda'^\mu_\nu\|$ в правой части все матричные элементы являются матрицами 2×2 . Условие сохранения метрического тензора (1.3b), записанное на матрицу 2×2 $\hat{\lambda}$, налагает на её матричные элементы три независимых условия, поскольку транспонирование (перестановка индексов $\mu \leftrightarrow \nu$) приводит к тому же самому уравнению. Таким образом, четыре матричных элемента $\hat{\lambda}$ определяются всего одним параметром. Этим параметром является абсолютное значение скорости V относительного движения систем координат.

1-4.1 Скорость движения и быстрота

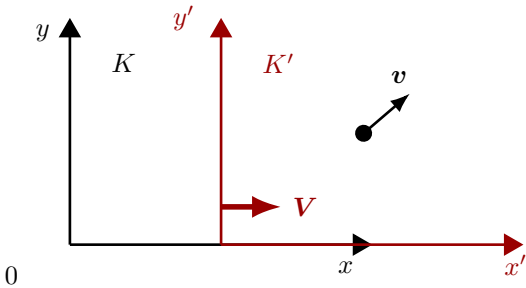


Рис. 1.1 Преобразование Лоренца – лоренцевский буст.

Система K' движется относительно системы K со скоростью V вдоль оси Ox . Оси двух систем параллельны друг другу. Частица движется со скоростью v в системе K .

1-4.1.1 Быстрота

Явный вид матрицы $\hat{\lambda}$ в (1.4a) относительно просто получить используя её представление в виде матричной экспоненты (1.3g). Для этого отбросим сейчас координаты y, z , которые не изменяются при преобразовании, после чего останутся матрицы 2×2 . Матрица-генератор

инфинитезимально малого ‘поворота’ $\hat{\Omega}$ (1.3f) имеет вид

$$\|\Omega_{\mu\nu}\| = \begin{pmatrix} 0 & -\varphi \\ \varphi & 0 \end{pmatrix},$$

$$\|\Omega^\mu_\nu\| = \|g^{\mu\rho}\Omega_{\rho\nu}\| = \begin{pmatrix} 0 & -\varphi \\ -\varphi & 0 \end{pmatrix},$$

то есть согласно (1.3g) сама матрица преобразования Лоренца

$$\hat{\lambda} = \exp \begin{pmatrix} 0 & -\varphi \\ -\varphi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch } \varphi & -\text{sh } \varphi \\ -\text{sh } \varphi & \text{ch } \varphi \end{pmatrix}. \quad (1.4b)$$

Параметр φ называется *быстротой* (rapidity).

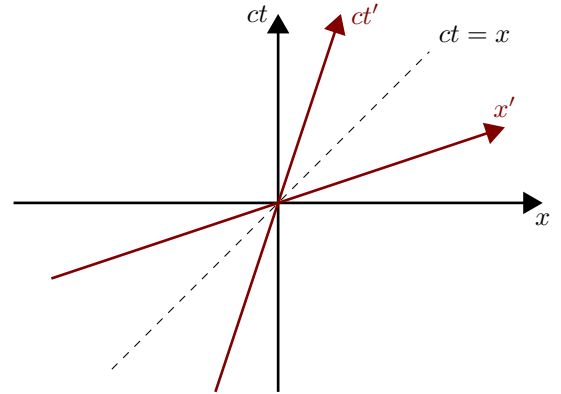


Рис. 1.2 Графическое изображение преобразования координат (1.4c, 1.4d) при лоренцевском бусте. Углы между осями t, t' и x, x' равны друг другу. Было выбрано $\beta = 1/3$. Штрихованная линия $ct = x$ остаётся биссектрисой и для осей новых координат.

1-4.1.2 Относительная скорость движения систем координат

Свяжем параметр φ с относительной скоростью движения систем координат V . Для этого представим матрицу перехода $\hat{\lambda}$ в виде

$$\hat{\lambda} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}, \quad \beta \equiv \frac{V}{c} = \text{th } \varphi, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (1.4c)$$

где, напомним, β называют безразмерной скоростью, а γ – γ -фактором. Проверим, что величина V здесь действительно имеет смысл относительного движения систем координат. Для этого выпишем непосредственно закон преобразования координат (1.3a), вытекающий из

(1.4c):

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \hat{\lambda} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}, \quad \Leftrightarrow \quad t' = \frac{t - xV/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (1.4d)$$

Положение начала пространственных координат системы K' задаётся уравнением $x' = 0$, которое согласно (1.4d) эквивалентно $x = Vt$, т.е. система K' относительно системы K движется со скоростью V в направлении оси Ox .

Собственно говоря, Х.А. Лоренц изучал именно частный вид (1.4c) преобразования координат. Хотя вместо 6 параметров для общего случая это преобразование содержит только 1 параметр, с физической стороны дела преобразование (1.4c) содержит все специфические свойства преобразования Лоренца. В англоязычной литературе преобразование (1.4c) называют лоренцевским бустом (*Lorentz boost*).

Матрица обратного перехода получается заменой $V \rightarrow -V$ (или $\varphi \rightarrow -\varphi$).

Быстрота φ как параметр удобна тем, что при двух последовательных преобразованиях для неё работает аддитивный закон сложения. Пусть система координат K_2 движется относительно системы K_1 со скоростью v_{21} вдоль оси Ox , а система K_3 движется относительно системы K_2 со скоростью V_{32} также вдоль оси Ox ; пространственные оси всех трёх координат параллельны друг другу. Скорости V_{21} соответствует быстрота φ_{21} , скорости V_{32} — быстрота φ_{32} . Тогда быстрота φ_{31} , соответствующая переходу из K_1 в K_3 , равна

$$\varphi_{31} = \varphi_{32} + \varphi_{21}, \quad V_{31} = \frac{V_{32} + V_{21}}{1 + V_{21}V_{32}/c^2}. \quad (1.4e)$$

что следует из представления матрицы Лоренца в виде (1.4b). Отметим, что быстрота подчиняется аддитивному закону только в том случае, если движение происходит вдоль одной оси, т.е. одномерно. В общем случае такая простота теряется.

1-4.1.3 Сокращение размеров движущегося тела в направлении движения

Пусть стержень длиной L движется вдоль оси Ox в лабораторной системе K со скоростью V , будучи ориентированным вдоль этой же оси. В системе K' , движущейся со скоростью V вдоль Ox , этот стержень покоится; система K' называется *сопровождающей системой координат*.

Зададимся следующим вопросом: какова видимая длина стержня в лабораторной системе K ?

Обозначим концы стержня 'a' и 'b', так что в сопровождающей системе отсчёта разность координат его концов $x'_b - x'_a = L$. По смыслу измерения расстояния мы должны производить измерение длины стержня фиксируя время, так что в лабораторной системе $t_b = t_a$ для моментов измерения. Используя преобразования Лоренца (1.4d) из K в K' , получаем соотношение

$$L = x'_b - x'_a = \gamma(x_b - x_a).$$

Таким образом, видимая длина стержня в системе K сократилась в γ раз,

$$L_K = x_b - x_a = \frac{L}{\gamma}. \quad (1.4f)$$

Этот феномен называют *лоренцевским сокращением длины* (*Lorentz contraction*).

Другой релятивистский эффект, заключающийся в том, что часы, связанные с движущимся телом, идут в γ раз медленнее, чем в лабораторной системе координат, обсуждается ниже в Пункте 1-5.2.

1-4.2 Поворот в пространстве

Пусть системы K и K' неподвижны друг относительно друга, однако их пространственные оси повернуты относительно друг друга. Таким образом, преобразование координат ограничивается преобразованием пространственных координат матрицей ортогонального поворота $\hat{O}$ размерности 3×3 . Матрица Лоренца в этом случае имеет вид

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \hat{O} \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

где $\vec{0}$ — столбец из трёх нулей, а $\vec{0}^T$, соответственно, — строка из трёх нулей.

Любое преобразование Лоренца $\hat{\Lambda}$, не содержащее в себе операции инверсии в пространстве и обращения времени, может быть представлено в виде

$$\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}_{O1} \hat{\Lambda}_B \hat{\Lambda}_{O2}, \quad (1.6)$$

где $\hat{\Lambda}_{O1}$ и $\hat{\Lambda}_{O2}$ являются матрицами поворота типа (1.5), а $\hat{\Lambda}_B$ — матрица лоренцевского буста (1.4c). Это и означает, что лоренцевский буст исчерпывает все специфические свойства преобразования Лоренца.

§1.5. Неравномерное движение материальной точки

Мы уже говорили выше, что в релятивистской механике в теорию не могут быть включены абсолютно твёрдые протяжённые тела. Обсудим здесь это подробнее, показав появление парадоксов при рассмотрении движения абсолютно твёрдого тела.

К первому парадоксу можно прийти, рассматривая вращение абсолютно твёрдого диска с постоянной угловой скоростью. Как было показано в Пункте 1-4.1.3, при поступательном движении размер тела в направлении этого движения сокращается. Мы можем разбить окружность диска на небольшие почти прямые участки. Каждый участок получит сокращение, то есть длина окружности диска станет меньше. Это означает, что, даже если расстояние между элементом и центром диска не изменяется, то всё равно изменяется расстояние между двумя близкими элементами диска, находящимися на одной окружности в сопровождающей их системе координат. Но это противоречит концепции абсолютно твёрдого тела.

Второй парадокс содержится в ускоренном движении абсолютно твёрдого тела под действием внешней силы. С одной стороны, поскольку тело абсолютно твёрдое, то сила, приложенная к его одной точке, должна тут же вызывать ускорение всех точек тела. Но это означает, что взаимодействие передаётся с бесконечно большой скоростью, поскольку тело является протяжённым в пространстве. Мгновенная передача взаимодействия, однако, запрещена постулатом релятивистской механики.

Поэтому в некантовой релятивистской теории массивные частицы могут рассматриваться только как материальные точки. Движение любого тела (материальной точки) задаётся линией в 4-х мерном пространстве времени. Действительно, в каждый момент времени тело находится в определённой точке пространства.

1-5.1 Мировая линия частицы

Пусть движение частицы описывается параметрически

$$x^\mu = x^\mu(s), \quad (1.7a)$$

через некоторый параметр s . Траектория (1.7a), описывающая движение тела в 4-х мерном пространстве-времени, называется мировой линией. Частный вид такой параметризации нами уже использовался при рассмотрении равномерного и прямолинейного движения (1.2d). В трёхмерных обозначениях 4-вектор $x^\mu = \{ct, \mathbf{r}\}$, и трёх-мерная скорость тела $\mathbf{v}$ имеет компоненты

$$v^i = \frac{dr^i}{dt} = c \frac{dx^i}{ds} / \frac{dx^0}{ds}. \quad (1.7b)$$

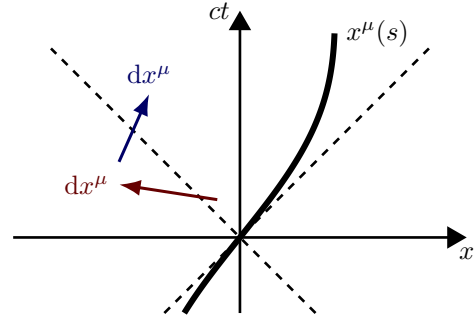


Рис. 1.3 Мировая линия массивной частицы. Образующая светового конуса обозначена пунктирной линией. Угол наклона касательной к мировой линии должен быть всегда меньше $\pi/4$ относительно временной оси. Коричневым цветом и синим цветом изображены некоторые 4-вектора (не связанные с мировой линией), которым соответствуют пространственно- и времени-подобный интервалы.

1-5.1.1 Световой конус

На Рисунке 1.3 изображена траектория частицы в плоскости координат $\{x, ct\}$. Поскольку скорость частицы всегда меньше скорости света, то наклон касательной к мировой линии на этом рисунке должен быть всегда больше, чем $\pi/4$. Вообще, если частица находилась в начале координат, то в дальнейшем она может попасть только в область $r^2 < c^2 t^2$, $t > 0$. Повлиять на состояние в этой точке могут только события из области $r^2 \leq c^2 t^2$, $t < 0$. Область $r^2 \leq c^2 t^2$ называется световым конусом для точки $x^\mu = 0$.

1-5.2 Собственное время

Рассмотрим движение массивной материальной точки. Возможно выбрать определение параметра $s \equiv s$ в (1.7a) “естественным образом”, т.е. так, что приращение ds есть интервал между событиями разделёнными вектором dx^μ :

$$\begin{aligned} x^\mu &= x^\mu(s), & dx^\mu &= x^\mu(s + ds) - x^\mu(s), \\ ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \end{aligned} \quad (1.7c)$$

Таким образом, (1.7c) есть обобщение (1.2g) на случай неравномерного движения тела. При таком определении параметра s мгновенная 4-скорость тела даётся равенством

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}. \quad (1.7d)$$

Легко проверить, что определяющее равенство (1.2h) для 4-скорости выполнено. В дальнейшем под s мы

всегда будем понимать параметр, выбранный естественным образом.

Предположим, что с телом связаны некоторые часы. Показания часов определяются параметром s : время τ , показываемое на этих часах, равно

$$\tau = \frac{s}{c}$$

с точностью до первоначального положения стрелок этих часов. Действительно, в инерциальной системе отсчёта, в данный момент движущейся с телом, приращение времени

$$d\tau = \frac{ds}{c}$$

вследствие того, что тело в этой системе координат в данный момент покоится, и потому изменения его координат в ней равно нулю. Время τ называется *собственным временем* тела (*proper time*), и является атрибутом его мировой линии.

Приращения собственного времени и времени в лабораторной системе отсчёта связаны коэффициентом пропорциональности γ — релятивистским фактором (1.2j):

$$dt = \gamma d\tau,$$

т.е. собственное время движущейся частицы всегда течёт медленнее (или также, если она покоится), чем время в выбранной инерциальной системе координат.

Для безмассовой частицы понятие собственного времени не имеет смысла. Если о безмассовой частице думать как о массивно с массой $m \rightarrow 0$, то мы получим формально, что собственное время безмассовой частицы заморожено вдоль её траектории.

1-5.2.1 Ускорение

Если скорость частицы имеет только относительный смысл, то её ускорение частицей может быть измерено самостоятельно. Производную 4-скорости по собственному времени s ,

$$w^\mu = \frac{du^\mu}{ds}, \quad (1.7e)$$

естественно называть 4-ускорением. Поскольку скорость нормирована на единицу, то

$$w^\mu u_\mu = 0. \quad (1.7f)$$

Связь 4-ускорения с 3-х мерным ускорением $\mathbf{a}$ однако уже не такая простая, как связь (1.2k) для скорости:

$$\|w^\mu\| = \frac{1}{c^2} \{0, \gamma^2 \mathbf{a}\} + \frac{\gamma^4 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})}{c^3} \{1, \beta\}, \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (1.7g)$$

1-5.3 Сложение скоростей

Пусть есть две инерциальные системы координат K и K' , переход между которыми (1.3a) осуществляется матрицей Лоренца Λ_ν^μ . Рассмотрим движение материальной точки, записанное в виде (1.2d), в котором параметр s выбран естественным способом. В силу инвариантности значения интервала, этот параметр один и тот же для обеих систем отсчёта. Поэтому 4-скорость в системе K' есть

$$u'^\mu = \frac{dx'^\mu}{ds} = \frac{\Lambda_\nu^\mu dx^\nu}{ds} = \Lambda_\nu^\mu u^\nu. \quad (1.7h)$$

Таким образом, 4-вектор скорости u^ν преобразуется по тому же закону (1.3a), что вектор координат x^ν ; собственно поэтому совокупность четырёх чисел u^ν и следует называть 4-вектором.

Рассмотрим теперь частную ситуацию, когда система K' движется относительно системы K вдоль оси Ox со скоростью V_K , см. (1.4c), а тело движется в системе K со скоростью $\mathbf{v}$, см. Рисунок 1.1. Расписывая (1.7h) с учётом (1.2k, 1.4c), получаем, что скорость $\mathbf{v}'$ тела в системе K' имеет компоненты

$$v'^x = \frac{v^x - V_K}{1 - v^x V_K / c^2}, \quad v'^{y,z} = \frac{v^{y,z}}{\gamma_K (1 - V_K v^x / c^2)}, \quad (1.7i)$$

где γ_K определяется через V_K как это сделано в (1.4c). Таким образом, продольная компонента скорости частицы и её поперечные компоненты по отношению к направлению взаимного движения систем отсчёта преобразуются по-разному.

§1.6. Описание движения частиц в терминах непрерывной среды

Понятие непрерывной среды подразумевает, что все величины (масса, импульс, заряд и т.д.) распределены в пространстве с некоторой объёмной плотностью. Классическая релятивистская механика исходно имеет дело с точечными частицами. Для точечной частицы её масса сосредоточена в каждый момент в одной точке.

Математически, связь между описанием частиц как материальных точек и величинами непрерывной среды

осуществляется через δ -функцию Дирака. Напомним, что δ -функция — это такая функция, которая равна нулю во всех точках кроме начала координат, а интеграл от неё по любой окрестности, содержащей начало координат равен единице.

Установим свойства интегралов и δ -функций в пространстве-времени по отношению к преобразованиям Лоренца. Из (1.3b) следует, что детерминант мат-

рицы преобразования Лоренца $\hat{\Lambda}$ по модулю равен единице, то есть единице равен якобиан перехода между старыми и новыми координатами. Поэтому мера интегрирования $d\Omega$ по 4-х мерному пространству является инвариантом,

$$d\Omega \equiv d^4x = c dt d^3\mathbf{r} = c dt' d^3\mathbf{r}' \equiv d\Omega'. \quad (1.8a)$$

Пусть y^μ – некоторое выделенное событие. Тогда, в силу релятивистской инвариантности меры интегрирования (1.8a), инвариантна также 4-х мерная δ -функция

$$\delta^{(4)}(x - y) = \delta^{(4)}(x' - y'), \quad (1.8b)$$

$$\delta^{(4)}(x - y) = \frac{1}{c} \delta(t_x - t_y) \delta^{(3)}(\mathbf{r}_x - \mathbf{r}_y),$$

поскольку только так достигается условие инвариантности результата интегрирования

$$1 = \int d\Omega \delta^{(4)}(x - y).$$

1-6.1 Четырёх-мерный ток

Рассмотрим движение частиц, которое мы хотим описать в терминах непрерывной среды. Каждая частица (пока не введена квантовая механика) описывается материальной точкой. Будем нумеровать частицы индексом a , тогда каждая частица описывает траекторию $\mathbf{r}_a(t)$, которой соответствует мировая линия $x_a^\mu(s)$. Кроме того, каждая частица обладает зарядом e_a и массой m_a .

Для описания движения заряда надо ввести объёмную зарядовую плотность ρ и объёмную плотностью электрического тока $\mathbf{j}$. Для описания движения частиц надо, соответственно, определить концентрацию частиц ρ_n и плотность потока частиц $\mathbf{j}_n$. Например, средние плотности электрических заряда и тока определяются как

$$\rho = \frac{1}{\delta V} \sum_{\mathbf{r}_a \in \delta V} e_a, \quad \mathbf{j} = \frac{1}{\delta V} \sum_{\mathbf{r}_a \in \delta V} e_a \mathbf{v}_a, \quad (1.8c)$$

где суммирование происходит по всем частицам, попадающим в элемент объёма δV .

Ниже в Пункте 1-6.2 мы покажем, что объёмная плотность и плотность потока составляют компоненты 4-вектора плотности тока,

$$\|j^\mu\| = \{c\rho, \mathbf{j}\}, \quad \|j_n^\mu\| = \{c\rho_n, \mathbf{j}_n\}. \quad (1.8d)$$

1-6.1.1 Уравнение непрерывности

Экспериментальный факт состоит в том, что существует точный закон сохранения электрического заряда во времени. В дифференциальной форме этот закон сохранения записывается в виде *уравнения непрерывности* (continuity equation)

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \partial_t \rho + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (1.8e)$$

Уравнение непрерывности, записанное для электрического тока, говорит, что не существует локальных источников заряда. Поэтому изменение количества заряда со временем $\partial_t \rho dV$ в элементе объёма dV связано только с тем, что есть ненулевой поток заряда через границы этого объёма. Действительно, уравнение непрерывности (1.8e) можно переписать в интегральном виде

$$\partial_t \int_V d^3\mathbf{r} \rho = - \int_{\partial V} d^2 S^i j^i,$$

где второе интегрирование производится по границе ∂V объёма V (вектор $d^2 S^i$ направлен наружу объёма), и оба интегрирования производятся в один и тот же момент времени.

1-6.1.2 Сохраняющийся полный заряд

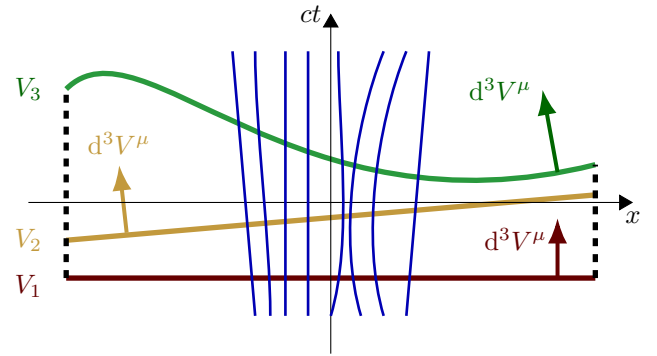


Рис. 1.4 Синими линиями изображены мировые линии зарядов. Красно-коричневая линия — интегрирование при постоянном времени по трёх-мерному пространству, см. (1.8f). Горчичная прямая — интегрирование при фиксированном времени в движущейся системе координат, см. Рисунок 1.2. Зелёная кривая — произвольная трёх-мерная гиперповерхность.

Равенство нулю 4-дивергенции 4-вектора плотности потока (1.8e) означает, что существует глобальная сохраняющаяся величина. В данном случае мы имеем дело с потоком заряда, поэтому сохраняющейся величиной является полный заряд системы

$$Q = \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{r} j^0 = \int d^3\mathbf{r} \rho(t, \mathbf{r}) = \text{const}, \quad (1.8f)$$

где интегрирование производится при фиксированном времени. Действительно, посчитаем производную $\partial_t Q$ согласно уравнению непрерывности (1.8e):

$$\partial_t Q = \int d^3\mathbf{r} \partial_t \rho(t, \mathbf{r}) = - \int d^3\mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = 0.$$

Последний интеграл по теореме Остроградского-Гаусса приводится к поверхностному интегралу. Он обращает-

ся в нуль, поскольку мы предполагаем, что система конечна, так что далеко при $r \rightarrow \infty$ нет ни зарядов, ни токов.

1-6.1.3 Полный заряд — релятивистский инвариант

Определённый в (1.8f) полный заряд является не только сохраняющейся величиной, но и релятивистским инвариантом. Это действительно должно быть так, поскольку результат подсчёта количества частиц и их суммарного заряда не должен зависеть от выбора системы отсчёта.

Интегрирование по пространству (1.8f) есть интегрирование по трёх-мерной гиперповерхности в 4-х мерном пространстве-времени, см. Рисунок 1.4. Элемент гиперповерхности d^3S^μ есть псевдо 4-вектор

$$d^3S^\mu = \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} dx^\nu dy^\lambda dz^\rho, \quad (1.8g)$$

где $dx^\nu, dy^\lambda, dz^\rho$ — три неколлинеарных вектора, на которые натянут данный элемент гипер-поверхности. Обратим внимание, что в выражении (1.8g) нет информации о сигнатуре метрики. Поэтому ортогональность 4-векторов d^3V^μ гиперповерхностям, которая ‘на глаз’ имеет место на Рисунке 1.4, следует воспринимать в смысле условной метрики с евклидовой сигнатурой.

Рассмотрим сначала общий случай замкнутой гиперповерхности $\partial\Omega$, которая содержит в себе некоторую область Ω пространства-времени. Тогда справедлива теорема Остроградского-Гаусса

$$0 = \int_{\Omega} d^4\Omega \partial_\mu j^\mu = \oint_{\partial\Omega} d^3S^\mu j_\mu. \quad (1.8h)$$

Теперь пусть 4-ток j^μ убывает на далёких расстояниях, то есть рассматриваемая система ограничена в пространстве. А форма гиперповерхности такова, что она полностью вмещает в себя область пространства, занимаемую системой в течении некоторого времени, см. Рисунок 1.4. Например, если гиперповерхность содержит в себе куски $V_{1,2}$, то правая часть уравнения (1.8h) есть

$$0 = \int_{V_1} d^3V^\mu j_\mu - \int_{V_2} d^3V^\mu j_\mu. \quad (1.8i)$$

Интеграл по V_1 есть полный заряд Q (1.8f). Мы получили, что полный заряд Q может быть также вычислен в некоторой движущейся системе координат интегрированием по V_2 , см. Рисунок 1.2. Таким образом, полный заряд, действительно, является релятивистским инвариантом. А также, полный заряд может быть вычислен и интегрированием по гиперповерхности произвольной формы V_3 , лишь бы она распространялась достаточно далеко по пространственным координатам.

1-6.1.4 Поток частиц. Связь скорости движения среды и тока. Релятивистский инвариант

Для произвольного типа частиц закона сохранения их количества не существует. Однако для некоторых сортов частиц закон сохранения выполняется. Тогда верно уравнение непрерывности и для потока частиц,

$$\partial_t \rho_n + \operatorname{div} \mathbf{j}_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\mu j_n^\mu = 0.$$

Здесь ρ_n — концентрация частиц в пространстве.

Для 4-тока существует связанный с ним релятивистский инвариант

$$j_\mu j^\mu = (c\rho)^2 - \mathbf{j}^2,$$

который должен быть неотрицательным, поскольку концентрация частиц сама является неотрицательной величиной. Выясним смысл этого инварианта. Выберем сопровождающую систему отсчёта, в которой пространственные компоненты 4-тока равны нулю. Её скорость движения в лабораторной системе $\mathbf{v}$ есть средняя скорость движения частиц в малом элементе объёма

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{j}_n}{\rho_n}, \quad \|U^\mu\| = (\gamma, \gamma\mathbf{v}). \quad (1.8j)$$

Мы обозначили через U^μ соответствующую $\mathbf{v}$ 4-скорость. Релятивистским инвариантом является концентрация частиц n в сопровождающей системе отсчёта,

$$n = \frac{\rho_n}{\gamma}, \quad j_n^\mu = \frac{c\rho_n}{\gamma} U^\mu = cn U^\mu, \quad j_{n\mu} j_n^\mu = c^2 n^2. \quad (1.8k)$$

Для электрического 4-тока инвариант $j_\mu j^\mu$ может быть знакопеременным, поскольку существуют заряды разных знаков. Если он положителен, то $j_\mu j^\mu = c^2 \varrho^2$, где ϱ есть объёмная плотность заряда в системе отсчёта, где электрический ток равен нулю, $\mathbf{j} = 0$. Если же инвариант отрицателен, то $j_\mu j^\mu = -j^2$, где j — амплитуда объёмной плотности тока в системе координат, где объёмная плотность зарядов нуль, $\rho = 0$. Такая ситуация может реализоваться, например, когда на фоне ионно-го положительно заряженного остова двигаются отрицательно заряженные электроны проводимости.

1-6.2 Связь потока с траекториями частиц

Усреднение по распределению частиц в малом объёме и переход к величинам непрерывной среды предполагает некоторую потерю информации. Мы сначала сделаем формально точный переход от траекторий точечных частиц к плотности и току. Затем мы покажем, как происходит усреднение, хотя часто более удобно проводить вычисления используя точные величины.

В трёх-мерных обозначениях объёмная плотность и плотность потока через траектории частиц выражаются

следующим образом:

$$\rho(t, \mathbf{r}) = \sum_a e_a \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)), \quad (1.9a)$$

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = \sum_a e_a \mathbf{v}_a(t) \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)),$$

где $\mathbf{r}_a(t)$ – траектория частицы номер a . Непосредственной проверкой можно убедиться, что ρ и $\mathbf{j}$, определённые согласно (1.9a), действительно удовлетворяют уравнению непрерывности (1.8e).

Четырёх-мерный ток можно также написать и в полностью ковариантной форме:

$$\begin{aligned} j^\mu(x) &= c \sum_a e_a \int ds u_a^\mu(s) \delta^{(4)}(x - x_a(s)) = \\ &= c u^\mu(x) \sum_a e_a \int ds \delta^{(4)}(x - x_a), \end{aligned} \quad (1.9b)$$

где интегрирование в каждом слагаемом производится вдоль мировой линии частицы $x_a(s)$, а четырёх-мерная δ -функция определена в (1.8b). Эквивалентность (1.9a) и (1.9b) легко проверить, подставив в (1.9b) выражение для 4-х мерной δ -функции в виде произведения (1.8b), представив

$$|dx_a^\mu| = u_a^\mu ds = \{c, \mathbf{v}_a\} dt_a \quad (1.9c)$$

и проинтегрировав по dt_a ; после этого придём к (1.9a).

Когда мы написали второе равенство в (1.9b), мы продолжили 4-скорость u^μ как функцию координат с мировых линий частиц на всё пространство. С одной стороны, эта операция виртуальна, поскольку всё равно 4-ток отличен от нуля только когда x попадает на мировую линию одной из частиц. С другой стороны, описание в терминах непрерывной среды интуитивно предполагает, что все величины сглажены и не имеют дискретности; в этом есть физический смысл доопределения 4-скорости u^μ на всё пространство-время.

Поскольку в (1.9b) справа стоит интеграл от произведения 4-вектора на 4-скаляр (см. (1.8b)), то в целом справа стоит 4-вектор. А значит, так определённое в (1.9b) j^μ также является 4-вектором.

1-6.2.1 Усреднение

В физических рассуждениях бывает удобней пользоваться усреднёнными величинами. Если за j_{exact}^μ обозначить выражения (1.9a, 1.9b), то усреднённые величины должны быть определены как результат усреднения по некоторому 4-объёму $\delta\Omega = c\delta t \delta V$, содержащему большое число частиц

$$j^\mu(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{\delta V \delta t} \int_{\mathbf{r}' \in \delta V} d^3 \mathbf{r}' \int_{t' \in \delta t} dt' j_{\text{exact}}^\mu(t + t', \mathbf{r} + \mathbf{r}'). \quad (1.9d)$$

Если $\delta t \rightarrow 0$, то усреднение является усреднением по пространству (1.8c). Если элемент объёма $\delta V \rightarrow 0$, то усреднение является усреднением по времени.

Операция усреднения (1.9d) может быть произведена над всем слагаемыми в левой части уравнения непрерывности (1.8e). Порядок проведения операций усреднения и дифференцирования в уравнении непрерывности может быть изменён без изменения результата. Поэтому уравнение непрерывности верно и для усреднённых величин.

1-6.3 Распределение частиц по скоростям

Пусть дан ансамбль одинаковых частиц, распределение скоростей которых описывается функцией распределением $f(\mathbf{u})$, где $\mathbf{u}$ – три пространственные компоненты 4-скорости: для того, чтобы посчитать количество частиц обладающих скоростями принадлежащих интересующей области $\mathcal{U}$ в 3-х мерном пространстве компонент u^i , надо взять интеграл по этой области

$$\int_{\mathcal{U}} f(\mathbf{u}) d^3 \mathbf{u}. \quad (1.10)$$

Подчеркнём, что, если система ограничена в пространстве, то $f(\mathbf{u})$ описывает все частицы в этой системе, то есть интеграл (1.10) по всему пространству скоростей равен полному количеству частиц.

Покажем, что при переходе в другую инерциальную систему координат функция распределения преобразуется по закону

$$\gamma f(\mathbf{u}) = \gamma' f'(\mathbf{u}'), \quad (1.11)$$

где γ -фактор берётся при соответствующем значении $\mathbf{u}$, а $\mathbf{u}'$ связано с $\mathbf{u}$ согласно закону преобразования (1.7h).

Действительно, сохранение количества частиц при переходе из одной системы координат в другую требует, чтобы выполнялось равенство

$$f(\mathbf{u}) d^3 \mathbf{u} = f'(\mathbf{u}') d^3 \mathbf{u}',$$

то есть, чтобы выражение $f(\mathbf{u}) d^3 \mathbf{u}$ являлось инвариантом. С другой стороны, выражение

$$\delta(u^\mu u_\mu - 1) du^0 d^3 \mathbf{u}$$

(пока написано это выражение, полагаем, что условие $u^\mu u_\mu = 1$ ещё не выполнено) является также инвариантом: первый множитель является инвариантом вследствие того, что скалярное произведение является инвариантом, второе слагаемое инвариантно, поскольку модуль детерминанта матрицы Лоренца (якобиан перехода) равен единице. Интегрируя это выражение по du^0 , получаем, что выражение

$$\frac{d^3 \mathbf{u}}{\gamma}$$

есть инвариант. Из сопоставления выписанных нами инвариантов получаем, что инвариантом является также величина (1.11).

1-6.4 Задачи

- **Задача 1:** Распределение плотности одномерной непрерывной среды

$$\rho(t, x) = \rho_0 + \frac{\rho_1 x}{a} \exp\left(-\frac{x^2 + (v_0 t)^2}{a^2}\right),$$

где параметры распределения $\rho_0 > \rho_1$. Найдите распределение плотности потока $j(t, x)$ и скорости движения $v(t, x)$ полагая, что на далёких расстояниях поток отсутствует, $j \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Нарисуйте профили полученных полей в пределе $\rho_1 \ll \rho_0$ для срезов $t = 0$ и $x = 0$.

- **Задача 2:** Электрический заряд может двигаться вдоль прямой. Известно, что плотность электрического тока вдоль прямой равна

$$J \exp\left(-\frac{(x - vt)^2}{a^2}\right),$$

где J, v, a — некоторые константы. Известно также, что в далёком прошлом погонная плотность заряда в каждой

фиксированной точке прямой была равна нулю. Найдите погонную плотность электрического заряда как функцию времени и координат. Постройте график зависимости плотности от координаты в нулевой момент времени и в момент времени $t = 3a/v$. Считая среду однокомпонентной, запишите связь между полностью заряда, плотностью тока и локальной скоростью движения зарядов; найдите скорость движения зарядов.

- **Задача 3:** По кольцу электро нейтрального провода радиуса a , покоящемуся в лабораторной системе координат K , течёт ток I . Погонная плотность свободных электронов, участвующих в перемещении заряда по проводу, равна ρ . Рассмотрим систему координат K' , движущуюся со скоростью v , лежащей в плоскости кольца провода. Считая, что все свободные электроны в элементе провода движутся с одной и той же скоростью, найти распределение погонной плотности нескомпенсированного заряда $\delta\rho'$ вдоль провода, которая будет наблюдаться в движущейся системе координат K' . Рассмотреть предельный случай $v \gg u$, где u — скорость движения электронов в лабораторной системе координат.

Глава 2

ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНЫХ ЧАСТИЦ; СОУДАРЕНИЯ ЧАСТИЦ

1	Действие и уравнения движения для свободной частицы	33
1.	Вариация мировой линии и действия	33
2.	Энергия и импульс частицы	34
3.	Безмассовые частицы	34
2	Распад и столкновения частиц	35
1.	Распад частицы	35
2.	Столкновение частиц	36
3.	Задачи	36
3	Тензор энергии-импульса	37
1.	Законы сохранения	37
2.	Неоднозначность задания тензора энергии-импульса	38
4	Тензор энергии-импульса для модельных сред	39
1.	Тензор энергии-импульса пылевидной материи	39
2.	Тензор энергии-импульса идеального газа	39
5	Момент импульса	40
1.	Внутренний орбитальный момент	41

§2.1. Действие и уравнения движения для свободной частицы

Описание движения свободной частицы в соответствии с программой, изложенной в Пункте 1-1.3, начнём с построения действия. Действие должно быть интегралом вдоль мировой линии частицы. Для мировой линии инвариантом является только приращение вдоль неё собственного времени (интервала) $d\tau = ds/c$, см. (1.7c) и Пункт 1-5.2. Поэтому действие должно иметь вид

$$S_m = -mc \int ds = -mc \int \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}, \quad (2.1a)$$

где m – коэффициент пропорциональности, который имеет физический смысл массы частицы. Общий знак определяется требованием, чтобы действие имело минимум (а не максимум) на истинной траектории. Таким образом, принцип минимума действия на истинной траектории для свободной частицы даёт максимизацию её собственного времени.

Мировую линию частицы всегда можно параметризовать также и через время t . После этого действие (2.1a) переписывается в виде, более похожем на нерелятивистскую запись:

$$S_m = \int dt L, \quad L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (2.1b)$$

в котором координаты $\mathbf{r}$ зависят от времени t , а скорость $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$. Если теперь предположить, что частица движется с нерелятивистскими скоростями, так что $v \ll c$, то действие приближённо можно записать в виде

$$S_m = -mc^2 \int dt + \int L' dt, \quad L' = \frac{mv^2}{2}. \quad (2.1c)$$

Первый вклад не зависит от траектории частицы, поэтому её определяет только второй вклад, который является действием для нерелятивистской частицы в классической механике. Получив правильное выражение для нерелятивистского лагранжиана L' в (2.1c), мы тем самым оправдали выбор общего коэффициента в (2.1a).

2-1.1 Вариация мировой линии и действия

Для определения истинной траектории частицы следует найти вариацию действия по вариации мировой линии частицы. Рассмотрим действие, соответствующее движению частицы от события 'a' до события 'b':

$$S_m = -mc \int_a^b \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}.$$

Варьированную мировую линию можно представить в виде (1.7c)

$$x^\mu(s) + \delta x^\mu(s), \quad ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

где $\delta x^\mu(s)$ – величина вариации. Отметим, что для варьированной мировой линии параметризующий её s в общем случае уже не является естественным параметром в смысле (1.7c). Вариация действия, линеаризованная по слабому изменению мировой линии движения ча-

стицы, равна

$$\begin{aligned}\delta S_m &= -mc \int_a^b \left(\sqrt{ds^2 + 2dx_\mu d\delta x^\mu} - ds \right) = \\ &= -mc \int_a^b \frac{dx_\mu}{ds} \frac{d\delta x^\mu}{ds} ds = \\ &= mc \int_a^b ds \frac{du_\mu}{ds} \delta x^\mu - mc u_\mu \delta x^\mu \Big|_a^b. \quad (2.1d)\end{aligned}$$

В процессе выкладок мы воспользовались определением 4-скорости (1.7d).

2-1.2 Энергия и импульс частицы

Второе слагаемое в (2.1d) даёт возможность определить импульс и энергию (гамильтониан) системы согласно равенствам (7.10):

$$\frac{\delta S}{\delta t_b} = -E, \quad \frac{\delta S}{\delta x_b^i} = p^i \quad \Leftrightarrow \quad \{E/c, -\mathbf{p}\} = -\left\| \frac{\delta S}{\delta x_b^\mu} \right\|.$$

В результате получаем, что энергия и импульс частицы составляют 4-вектор, называемый 4-импульсом, пропорциональный 4-скорости тела,

$$\|p_\mu\| = \{E/c, -\mathbf{p}\} = -\left\| \frac{\delta S}{\delta x_b^\mu} \right\| = mc \|u_\mu\|. \quad (2.1e)$$

В частности, мы установили, что 4-импульс является касательным вектором к траектории частицы, что оправдывает выбор обозначений в (1.2d).

Первое слагаемое в (2.1d) определяет уравнения движения:

$$\frac{dp^\mu}{ds} = 0, \quad (2.1f)$$

то есть энергия и импульс свободного тела сохраняются по мере его движения. Сохранение энергии и импульса следовало ожидать сразу, поскольку лагранжиан не зависит явно от времени и координат, см. Пункт 7-3.1.2.

Про уравнение движения, записанное в виде (2.1f) говорят, что оно записано в *ковариантной форме*. Это означает, что равенство (2.1f) имеет вид тензорного равенства в пространстве Минковского, и потому имеет один и тот же вид в любой инерциальной системе отсчёта. Таким образом достигается требование о равноправии инерциальных систем отсчёта, см. Пункт 1-1.2.3.

Воспользуемся (1.2k) и свяжем выражения для энергии и импульса частицы с трёх-мерными обозначениями:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma mc^2, \quad (2.1g)$$

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma m\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}c^2}{E} = c \frac{\mathbf{p}}{p^0}.$$

Последнее равенство следует только из того, что p^μ является вектором касательным к мировой линии частицы, см. (1.2f). Из (1.2h, 2.1e) следует, что квадрат 4-импульса пропорционален квадрату массы,

$$p^\mu p_\mu = (E/c)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2. \quad (2.1h)$$

2-1.2.1 Формула Эйнштейна для массы покоя

Пусть частица покоится, $\mathbf{v} = 0$. Трёх-мерный импульс $\mathbf{p}$ частицы в этом случае как и должно быть равен нулю, тогда как энергия равна

$$E_0 = mc^2. \quad (2.1i)$$

Отсюда следует сделать вывод, что масса является одной из форм энергии. Этот факт впервые был осознан А. Эйнштейном, поэтому соотношение (2.1i) для энергии покоя частицы массы m называется *формулой Эйнштейна для массы покоя*, см. историческую справку в [Окунь, 2008].

Если частица движется, то её энергия превышает энергию покоя. Разницу между этими энергиями можно назвать кинетической энергией

$$E_{\text{kin}} = E - E_0 = (\gamma - 1)mc^2. \quad (2.1j)$$

2-1.2.2 Нерелятивистский предел

В нерелятивистском пределе, когда $v \ll c$, можно разложить знаменатель в выражениях (2.1g). В результате получим

$$E_{\text{kin}} \approx \frac{mv^2}{2}, \quad \mathbf{p} \approx m\mathbf{v}. \quad (2.1k)$$

Таким образом, выражение как для кинетической энергии, так и для импульса совпало с известными выражениями в ньютоновской механике.

2-1.2.3 Гамильтонова форма уравнений движения

Гамильтониан свободной частицы $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H} = \mathbf{p}\mathbf{v} - L = \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4} = E,$$

где мы воспользовались выражением для лагранжиана (2.1b). В случае малых скоростей гамильтониан приближённо равен

$$\mathcal{H} \approx mc^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^2 c^2}. \quad (2.1l)$$

Второе слагаемое соответствует гамильтониану частицы в галилеевской механике. Третье слагаемое представляет собой первую релятивистскую поправку к закону дисперсии массивной частицы.

2-1.3 Безмассовые частицы

Известно, что некоторые элементарные частицы имеют нулевую массу. Такими частицами являются, например, фотон и скорее всего нейтрино. В этом случае квадрат 4-импульса равен нулю,

$$p^\mu p_\mu = 0, \quad \Leftrightarrow \quad E^2 = p^2 c^2 \quad (2.1m)$$

согласно (2.1h).

Для массивных частиц 4-импульс является касательным к мировой линии частицы, см. (2.1e) и (1.7d). Обобщая это условие на безмассовые частицы заключаем,

что они могут двигаться только со скоростью света, поскольку квадрат касательного вектора к мировой линии равен нулю, сравни (2.1m, 1.2p). Для безмассовых частиц невозможно ввести 4-скорость, тогда как их 4-импульс может быть любым, удовлетворяющим условию (2.1m).

В Пункте 4-3.3 обсуждается закон преобразования 4-импульса безмассовых частиц при переходе из одной системы отсчёта в другую.

§2.2. Распад и столкновения частиц

В этом параграфе мы рассмотрим аспекты взаимодействия частиц друг с другом. Деталими взаимодействия мы здесь не интересуемся, поскольку построение теорий этих взаимодействий находится за рамками классической релятивистской электродинамики. Важным свойством этих взаимодействий является их короткодействие. Иными словами, когда частицы находятся далеко друг от друга, этими взаимодействиями можно пренебречь. Поэтому мы будем пользоваться приближением, в котором частицы не взаимодействуют, пока они находятся на далёком расстоянии, так что их можно считать свободными. Мы рассматриваем только начальную конфигурацию частиц (в “далёком прошлом”) и конечную конфигурацию (в “далёком будущем”).

Столкновения частиц, в результате которых частицы меняют своё внутреннее состояние или рождаются новые частицы, называются неупругими столкновениями. Важным утверждением классической релятивистской электродинамики является утверждение, что масса является формой энергии, см. Пункт 2-1.2. Сама же энергия является частью 4-импульса. Таким образом, хотя законы сохранения энергии и импульса были получены нами в случае отсутствия неупругих столкновений, пользуясь физическими соображениями, мы должны его распространить на случай также и неупругих столкновений.

Литература: [Балдин и др., 1959]

2-2.1 Распад частицы

Рассмотрим сначала распад частицы массы M , за которым следит некоторый наблюдатель. Введём понятие лабораторной системы отсчёта K_L ; наблюдатель в этой системе отсчёта является неподвижным. В этой системе отсчёта частица до распада двигалась со скоростью $\mathbf{V}$ и имела 4-импульс p^μ . Введём также сопровождающую систему координат K'_M , которая движется со скоростью частицы, так частица в ней покоится.

Частица распадается на N частиц (продуктов распада), которые после совершения процесса распада уже не взаимодействуют друг с другом. Эти частицы мы бу-

дем нумеровать индексом a ; массы частиц равны m_a , их 4-импульсы равны p_a^μ .

Рассмотрим закон сохранения энергии и импульса, записанный в ковариантной форме

$$\sum_{a=1}^N p_a^\mu = p^\mu. \quad (2.2a)$$

Если прочесть это равенство в обратную сторону, то можно сделать следующее заключение. 4-импульс p^μ есть суммарный импульс системы, состоящей из N частиц. Если известны только импульсы продуктов распада, то воспользовавшись формулами (2.2a, 2.1h, 2.1g), мы можем последовательно найти полные 4-импульс системы, её эффективную массу и скорость системы центра масс.

Теперь перейдём в сопровождающую систему отсчёта K'_M . Уравнение (2.2a) на нулевую компоненту 4-импульса тогда примет вид

$$M = \sum_{a=1}^N \frac{m_a}{\sqrt{1 - v_a'^2/c^2}} \geq \sum_{a=1}^N m_a. \quad (2.2b)$$

Таким образом, суммарная масса покоя продуктов распада не может быть больше чем масса покоя распавшейся частицы. В реальности она всегда меньше, поскольку часть энергии покоя распавшейся частицы переходит в кинетическую энергию продуктов распада.

Конечно, уравнение (2.2a) не фиксирует полностью направления и скорости вылета продуктов распада. Эти параметры зависят от внутреннего состояния исходной частицы на момент её распада. Чаще всего это состояние определить возможно только вероятностным образом, и поэтому к описанию состояния продуктов распада должны также применяться статистические методы.

Рассмотрим наиболее простой случай, когда частица распадается на две частицы, и перейдём в сопровождающую систему координат. В таком случае закон сохранения импульса приводит к

$$\mathbf{p}'_2 = -\mathbf{p}'_1.$$

Естественней всего предположить, что все направления вылета частицы №1 равновероятны, тогда в нашем случае выписанное уравнение даёт условную вероятность для направления импульса частицы №2.

2-2.2 Столкновение частиц

При упругом столкновении частиц их количество и внутренние свойства не меняются, а изменяется только скорость движения. Пусть до столкновения частицы имели импульсы p_a^μ , а после столкновения они приобрели импульсы $\tilde{p}_a^\mu$. По закону сохранения 4-импульса

$$\sum_{a=1}^N \tilde{p}_a^\mu = \sum_{a=1}^N p_a^\mu = P^\mu.$$

общий 4-импульс системы P^μ сохраняется.

В случае неупругого столкновения частиц основной интерес представляет случай, когда две относительно лёгкие частицы сталкиваются с ультрарелятивистскими скоростями. Эффективная масса M такой системы велика. Благодаря этому в результате столкновения могут быть рождены частицы с массой покоя, значительно превышающей массу покоя сталкивающихся частиц.

Рассмотрим простейший вариант, когда сталкиваются две одинаковых частицы массой m_s , движущиеся друг навстречу другу с одинаковыми скоростями, по модулю равными v . В результате столкновения эти частицы отдают часть своей кинетической энергии на рождение ещё двух частиц массой m_g :

$$s + s \rightarrow s + s + g + g.$$

Минимальный γ -фактор, при котором ещё возможна эта реакция, называется порогом реакции. Для того чтобы его найти, нужно предположить, что после столкновения все частицы оказались в состоянии покоя, так что вся энергия системы оказалась запасённой в энергии покоя:

$$\gamma m_s = m_s + m_g.$$

Если рождающиеся частицы намного тяжелее сталкивающихся, $m_g \gg m_s$, то условие порога можно приближённо записать в виде $\gamma \approx m_g/m_s$.

2-2.3 Задачи

• **Задача 1:** Если коллайдер на встречных пучках работает в штатном режиме, то при столкновении двух

протонов интересующая нас реакция X происходит с превышением её порога в α раз, т.е. $E = \alpha E_{th}$, E — энергия протонов, а E_{th} — их пороговая энергия. Однако из-за неполадок один из двух пучков в коллайдере имеет энергию, составляющую часть ϵ от номинальной. При каком значении ϵ порог реакции X достигнут не будет? Пучки считать релятивистскими, так что $\gamma \gg \alpha^2$.

• **Задача 2:** π^0 -мезон распадается на лету на два γ -кванта. Найти минимальный угол θ_{min} разлёта γ -квантов в системе отсчёта, в которой скорость π^0 -мезона равна v .

• **Задача 3:** Распад π -мезонов происходит на нейтрино и на μ -мезон (масса π -мезона ≈ 140 МэВ, масса μ -мезона ≈ 105 МэВ, нейтрино следует считать безмассовой частицей). В системе покоя π -мезона распад $\pi \rightarrow \mu + \nu$ происходит статистически изотропно. В лабораторной системе координат π -мезон движется с энергией 6 ГэВ в Ox -направлении.

Определить энергетический спектр, максимальную и среднюю энергии и угловое распределение вылетающих нейтрино в лабораторной системе координат.

• **Задача 4:** Зеркало движется нормально к собственной плоскости со скоростью V . Найти закон отражения плоской монохроматической волны от такого зеркала (заменяющий закон равенства углов падения и отражения при $V = 0$), а также закон преобразования частоты при отражении. Рассмотреть, в частности, случай $V \rightarrow c$.

• **Задача 5:** Зеркало движется поступательно под углом $\pi/4$ к собственной поверхности со скоростью V . Найти закон отражения плоской монохроматической волны от такого зеркала (заменяющий закон равенства углов падения и отражения при $V = 0$), а также закон преобразования частоты при отражении. Рассмотреть, в частности, случай $V \rightarrow c$.

• **Задача 6:** Доказать, что законами сохранения энергии и импульса запрещена аннигиляция пары электрон — позитрон, сопровождаемая испусканием одного γ -кванта, но нет запрета на реакцию аннигиляции пары с испусканием двух фотонов. Доказать также, что излучение и поглощение света свободным электроном в вакууме невозможно.

• **Задача 7:** Покоящаяся частица массы M , находящаяся в возбуждённом состоянии, испускает γ -квант, после чего её масса покоя становится равной m . Чему равна кинетическая энергия частицы после испускания кванта?

§2.3. Тензор энергии-импульса

Перепишем уравнения движения (2.1f) в терминах непрерывной среды. Для этого в действии (2.1d) введём фиктивное интегрирование по пространству-времени,

$$S = -mc \int d\Omega_x \int_a^b ds \delta^{(4)}(x - x_s).$$

сравни с выражением для 4-тока в (1.9b). Вариацию действия, однако, технически удобнее производить в прежнем виде интеграла вдоль мировой линии, см. (2.1d). Сейчас мы положим вариацию пути на концах равной нулю, так что в последней строчке (2.1d) остаётся только первое слагаемое. Теперь обратно восстановим интегрирование по пространству-времени:

$$\delta S = -mc \int d\Omega_x \int_a^b ds \delta^{(4)}(x - x_s) u^\nu(x) \partial_\nu u^\mu(x) \delta x_\mu, \quad (2.3a)$$

где $x_s = x_s(s)$ – мировая линия частицы, а u^μ – её 4-скорость. Мы воспользовались тем, что если под интегралом стоит $\delta^{(4)}(x - x_s)$, то любой множитель f ($f = du_\mu/ds$ в данном случае), исходно зависящий от параметра s на мировой линии, можно вместо этого считать функцией 4-координаты x . Дифференцирование по параметру s переписывается через градиент в пространстве-времени следующим образом: смещение вдоль мировой линии на ds означает смещение в пространстве-времени на вектор $dx^\mu = u^\nu ds$, поэтому

$$\frac{df}{ds} ds = df = (dx^\nu \partial_\nu) f = u^\nu \partial_\nu f ds, \quad \text{i.e.} \quad \frac{d}{ds} = u^\nu \partial_\nu. \quad (2.3b)$$

Таким образом, при переходе от (2.1d) к (2.3a) мы произвели замену

$$\frac{du^\mu(x_s)}{ds} \rightarrow \int d\Omega_x \delta^{(4)}(x - x_s) u^\nu(x) \partial_\nu u^\mu(x).$$

Далее, в подынтегральном выражении (2.3a) можно в качестве отдельного множителя выделить поток массы

$$\|j_m^\nu\| = (c\rho_m, \mathbf{j}_m) = \frac{c\rho_m}{\gamma} \|u^\nu\|,$$

см. (1.9b), где вместо зарядов надо выбрать массы частиц. Поэтому вариация (2.3a) переписывается в виде

$$\delta S = \int d\Omega j_m^\nu \partial_\nu u^\mu \delta x_\mu = \frac{1}{c} \int d\Omega \partial_\nu T^{\nu\mu} \delta x_\mu, \quad (2.3c)$$

$$T^{\mu\nu} = c j_m^\nu u^\mu = \frac{c^2 \rho_m}{\gamma} u^\mu u^\nu.$$

В том числе, мы воспользовались уравнением непрерывности (1.8e) для потока массы, $\partial_\nu j_m^\nu = 0$. В нашем случае он верен, поскольку в рассматриваемой модели

при движении каждая частица по отдельности сохраняет свою массу.

Тензор $T^{\mu\nu}$ называется *тензором энергии-импульса* (*stress-energy tensor*). Как следует из его последней записи (2.3c), мы получили его в симметричном виде,

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}. \quad (2.3d)$$

Если принять, что траектории частиц истинные, т.е. вариация действия равна нулю, то дивергенция тензора энергии-импульса оказывается равной нулю,

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.3e)$$

Тензор энергии-импульса является важным понятием в физике, через него выражаются законы сохранения. Здесь мы ввели этот тензор только для массивных точечных частиц, сохраняющих при движении свою массу покоя. Для совокупной системы частиц и электромагнитного поля этот тензор будет обсуждаться далее в §2.

2-3.1 Законы сохранения

Рассмотри более подробно уравнения (2.3e). Как обсуждалось в Пункте 1-6.1, равенство нулю 4-дивергенции векторного поля означает, что существует сохраняющаяся во времени величина, см. (1.8f). Условие равенства нулю тензора энергии-импульса (2.3e) содержит в себе 4 скалярных уравнения (количество значений индекса ν), поэтому существует 4 сохраняющиеся величины. Понятно, что этими величинами должны быть полная энергия системы и три компонента пространственного импульса.

Для того, чтобы показать это, рассмотрим матричную структуру тензора энергии-импульса. В случае общего положения эту структуру для выделения физического смысла компонент имеет смысл представить в виде

$$\|T^{\mu\nu}\| = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{E} & c\vec{p}^T \\ \hline \mathbf{S} & -\hat{\sigma} \\ \hline \frac{\mathbf{S}}{c} & \end{array} \right). \quad (2.3f)$$

Мы ввели объёмные плотности энергии $\mathcal{E}$, потока импульса $\vec{p}$, вектора потока энергии $\mathbf{S}$, а также тензор напряжений σ^{ik} , являющийся симметричной матрицей 3x3:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= T^{00}, & \sigma^{ik} &= -T^{ik}, \\ p^i &= T^{0i}/c, & S^i &= cT^{i0}, & \mathbf{S} &= c^2 \vec{p}, \end{aligned} \quad (2.3g)$$

Трёх-мерные вектора потока энергии и плотности импульса пропорциональны друг другу.

В (2.3f) в верхней строчке стоят величины, интеграл от которых по пространству равен полному 4-импульсу системы

$$\|P^\mu\| = \{E/c, \mathbf{P}\}, \quad P^\mu = \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{r} T^{0\mu} \quad (2.3h)$$

и являются сохраняющейся величиной, сравни с (1.8f). В трёх нижних строчках (2.3f) стоит поток сохраняющихся величин P^μ .

Нижние три строчки в (2.3f) представляют собой потоки соответствующих величин. Действительно, если в (2.3e) положить, например, $\nu = 0$, то согласно введённым обозначениям мы получим уравнение сохранения энергии

$$\partial_t E + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0. \quad (2.3i)$$

Видно прямое соответствие этого уравнения с уравнением непрерывности для плотности заряда, см. (1.8e).

Поток импульса $\vec{p}$ представляет собой не вектор, а матрицу 3×3 , поскольку сам импульс — векторная величина. Согласно введённым обозначениям, если в (2.3e) положить $\nu = k$, то мы придём к уравнению

$$\partial_t p^k - \partial_i \sigma^{ik} = 0. \quad (2.3j)$$

2-3.2 Неоднозначность задания тензора энергии-импульса

Законы сохранения энергии и импульса останутся в силе, если к тензору энергии-импульса добавить величину, также имеющую нулевую 4-дивергенцию (2.3e) и не изменяющую значение интегралов движения (2.3h):

$$T^{\nu\mu} \rightarrow T^{\nu\mu} + \delta T^{\nu\mu}, \quad \partial_\nu \delta T^{\nu\mu} = 0, \quad \int d^3\mathbf{r} \delta T^{0\mu} = 0. \quad (2.4a)$$

Как мы увидим ниже, относительно просто оказывается получить тензор энергии импульса в несимметричном виде, то есть не соответствующем условию (2.3d), когда вместо частиц мы имеем дело с полем. Тогда преобразованием вида (2.4b) тензор энергии-импульса можно привести к симметричному виду. Это важно, поскольку симметричный тензор энергии-импульса позволяет определить через него момент импульса.

Симметричность тензора энергии-импульса может быть достигнута заменой вида

$$\delta T_\mu^\nu = \partial_\lambda \psi_\mu^{\nu\lambda}, \quad \psi_\mu^{\nu\lambda} = -\psi_\mu^{\lambda\nu} \quad (2.4b)$$

при произвольном $\psi_\mu^{\nu\lambda}$ (убывающем достаточно быстро на далёких расстояниях, см. ниже) не нарушает бездивергентности тензора энергии-импульса (2.3d) ввиду

наложенной антисимметричности $\psi_\mu^{\nu\lambda}$ по верхним двум индексам. Преобразование (2.4b) оставляет неизменным интеграл от величин T_μ^0 по пространству, который равен полному 4-импульсу P_ν (4.16c) системы:

$$\int d^3\mathbf{r} (T_\mu^0 + \partial_i \psi_\mu^{i0}) = \int d^3\mathbf{r} T_\mu^0 + \int d^2S n^i \psi_\mu^{i0} = cP_\mu. \quad (2.4c)$$

Убывание $\psi_\mu^{\nu\lambda}$ на далёких расстояниях должно быть настолько быстрым, чтобы интеграл по поверхности объёма с радиусом r в (2.4c) оказался равным нулю в пределе $r \rightarrow \infty$.

Требование симметричности $T^{\mu\nu}$ не фиксирует, однако, его однозначно, поскольку существуют нетривиальные преобразования (2.4b), переводящие симметричный тензор энергии-импульса снова в симметричный, отличный от исходного. Симметричность $T^{\mu\nu}$ накладывает требование на вид преобразования — оно должно уравнивать в функциональном смысле индексы μ и ν , что приводит к необходимости введения тензора четвёртого ранга $\Psi^{\rho\mu\nu\lambda}$, антисимметричного по перестановкам внутри первой и второй пар индексов:

$$T^{\mu\nu} \rightarrow T^{\mu\nu} + \partial_\lambda \partial_\rho \Psi^{\rho(\mu\nu)\lambda}, \quad (2.4d)$$

$$\Psi^{\rho(\mu\nu)\lambda} \equiv (\Psi^{\rho\mu\nu\lambda} + \Psi^{\rho\nu\mu\lambda})/2,$$

$$\Psi^{\rho\mu\nu\lambda} = -\Psi^{\rho\nu\mu\lambda} = -\Psi^{\rho\mu\lambda\nu},$$

где круглые скобочки, группирующие индексы, означают симметризацию по этим индексам (отметим, что в результате симметризации $\Psi^{\rho(\mu\nu)\lambda}$ перестаёт быть антисимметричным по перестановкам в парах индексов $\rho\mu$ и $\nu\lambda$). Непосредственной подстановкой убеждаемся, что полный 4-импульс системы не изменяется, поскольку интеграл по пространству от добавки $\delta T^{0\nu}$ равен нулю:

$$\int d^3\mathbf{r} \partial_\lambda \partial_\rho \Psi^{\rho(0\nu)\lambda} = \int d^3\mathbf{r} \partial_i (\partial_\lambda \Psi^{i0\nu\lambda} + \partial_\rho \Psi^{\rho\nu 0i}) = 0. \quad (2.4e)$$

В рамках специальной теории относительности невозможно однозначно зафиксировать симметричный тензор энергии-импульса. Однако в общей теории относительности этот выбор оказывается однозначным, поскольку тензор энергии-импульса материи (частиц и электромагнитного поля) определяется как результат вариации действия, связанного с материей, по метрике. Такой тензор энергии-импульса можно назвать Каноническим, он фигурирует в уравнении Эйнштейна на гравитационное поле.

§2.4. Тензор энергии-импульса для модельных сред

2-4.1 Тензор энергии-импульса пылевидной материи

Рассмотрим совокупность частиц, которые не испытывают столкновений друг с другом. Мы предполагаем, что пространственно близкие частицы имеют близкие скорости. Среду, образованную такими частицами, сравнивают с пылью и потому называют её пылевидной.

В (2.3a) рассматривалась вариация действия для одной из таких частиц. Поэтому можно воспользоваться (2.3c) и записать компоненты тензора энергии-импульса пылевидной материи (здесь мы добавили в индекс символы (m) для подчеркивания того, что речь идёт о частицах) в виде

$$\|T^{(m)\mu\nu}\| = \left(\begin{array}{c|ccc} \mathcal{E} & p^x c & p^y c & p^z c \\ \hline \mathcal{E} v^x / c & p^x v^x & p^y v^x & p^z v^x \\ \mathcal{E} v^y / c & p^x v^y & p^y v^y & p^z v^y \\ \mathcal{E} v^z / c & p^x v^z & p^y v^z & p^z v^z \end{array} \right). \quad (2.5a)$$

Как следует из (2.3c), в (2.5a) объёмные плотности энергии $\mathcal{E}$ и импульса $\vec{p}$

$$\mathcal{E} = \gamma \rho_m c^2 = c \gamma j_m^0, \quad \vec{p} = \gamma \rho_m \mathbf{v} = \gamma \mathbf{j}_m \quad (2.5b)$$

Полный 4-импульс системы (2.3h) естественным образом может быть выражен в виде суммы по отдельным частицам,

$$E = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} m_{\alpha} c^2, \quad P^i = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} m_{\alpha} v_{\alpha}^i$$

что можно получить, воспользовавшись связью (1.9b) непрерывных потоков с мировыми линиями отдельных частиц.

Поток каждой компоненты $\{\mathcal{E}, \vec{p}\}$ равен ей же, помноженной на локальную скорость. Для демонстрации этого, перепишем уравнение (2.3j) на локальное изменение плотности импульса для свободных частиц:

$$\partial_t p^i + \partial_k (v^k p^i) = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \partial_t \vec{p} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \vec{p} = 0. \quad (2.5c)$$

Например, величина $\vec{p} v^x$ есть плотность потока вектора импульса в x -направлении. Отметим, что в отличие от плотности потока массы $\mathbf{j}_m$, плотность потока импульса $\vec{p}$ (2.3g) не является частью какого-либо 4-вектора. Уравнение на плотность энергии (2.3i) выглядит как

$$\partial_t \mathcal{E} + \text{div}(\mathbf{v} \mathcal{E}) = 0, \quad \mathbf{S} = \mathcal{E} \mathbf{v}.$$

Для пылевидной среды верно уравнение непрерывности для потока массы (1.8e), которое вместе с уравнением переноса энергии даёт возможность переписать уравнение на импульс (2.5c) в виде

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = 0. \quad (2.5ca)$$

Из тензора энергии-импульса пылевидной материи можно составить релятивистский инвариант путём операции свёртки:

$$T^{(m)\mu}_{\mu} = \frac{c^2 \rho_m}{\gamma} \equiv \mathcal{E}. \quad (2.5d)$$

Мы уже получали этот инвариант другими рассуждениями, см. (1.8k). Для пылевидной материи возможно выбрать такую систему отсчёта, в которой скорость пыли в выделенных точке и момент времени равна нулю; в этой системе отсчёта массовая плотность пыли есть $\mathcal{E}/c^2$, где $\mathcal{E}$ можно назвать плотностью энергии покоя пыли. В таком случае единственным ненулевым матричным элементом тензора энергии-импульса является

$$T^{(m)00} \equiv \mathcal{E} = T^{(m)\mu}_{\mu}. \quad (2.5e)$$

2-4.2 Тензор энергии-импульса идеального газа

Литература: [Вайнберг, 1975, Гл.2§10].

Предположим теперь, что мы имеем дело не с пылью, а газом. Его отличие от пыли состоит в том, что в каждом элементе газа частицы газа имеют ненулевые скорости относительно друг друга. В результате у газа есть внутреннее давление и температура. Мы предполагаем сейчас, что число частиц и их масса сохраняются.

Обобщая (2.3c, 1.8c), можно написать выражение для усреднённого значения тензора энергии-импульса по некоторому элементу объёма δV , в котором находится большое количество частиц

$$T^{\mu\nu} = \frac{c}{\delta V} \sum_{a \in \delta V} \frac{p_a^{\mu} p_a^{\nu}}{p_a^0} \equiv c \left\langle \frac{p_a^{\mu} p_a^{\nu}}{p_a^0} \right\rangle_a, \quad (2.6a)$$

которое применимо также и для безмассовых частиц. Можно также сказать, что в правой части (2.6a) производится усреднение по распределению скоростей частиц.

Выберем теперь для этого элемента объёма сопровождающую его систему отсчёта, в которой средний поток заключённых в нём частиц равен нулю. У этой системы координат 4-скорость равна U^{μ} , см. (1.8j).

Приближение идеального газа состоит в предположении, что в каждом элементе установлено локальное статистическое равновесие; если же статистика в соседнем элементе другая, то обмена теплом между соседним элементом не происходит. В таком случае распределение скоростей частиц в покоящемся элементе объёма статистически изотропно, так что, в частности

$$\left\langle \frac{p^i p^k}{p^0} \right\rangle = \frac{1}{3} \delta^{ik} \left\langle \frac{p^2}{p^0} \right\rangle,$$

и тензор энергии-импульса примет вид

$$\|T^{\mu\nu}\| = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = c \langle p^0 \rangle, \quad P = \frac{c}{3} \left\langle \frac{p^2}{p^0} \right\rangle, \quad (2.6b)$$

где усреднение происходит по частицам внутри выделенного элемента объёма δV . Согласно определениям *объёмной плотности собственной энергии* ε и *давления* P в (2.6b) выполняется неравенство

$$T^\mu_\mu = \varepsilon - 3P > 0 \quad (= 0 \text{ for massless}) \quad (2.6c)$$

для массивных частиц. Для безмассовых частиц этот инвариант как и прежде равен нулю. Для пыли, отдельно рассмотренной в Пункте 2-4.1, давление равно нулю, $P = 0$.

Перейдём теперь с лабораторную систему координат, в которой элемент газа движется со скоростью U^μ . Тогда тензор энергии-импульса и поток частиц приобретают вид

$$T^{\mu\nu} = \frac{\varepsilon + P}{c} U^\mu U^\nu - \frac{P}{c} g^{\mu\nu}, \quad j^\mu_n = n U^\mu. \quad (2.6d)$$

Перепишем уравнения сохранения 4-импульса и количества частиц

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu j^\mu_n = 0$$

в виде уравнений течения идеального релятивистского газа. Если в трёхмерное векторное уравнение $\partial_\mu T^{\mu i} = 0$ подставить скалярное уравнение $\partial_\mu T^{\mu 0} = 0$, то мы придём к релятивистскому уравнению Эйлера

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = - \frac{c^2}{\gamma^2(\varepsilon + P)} \left(\nabla P + \frac{\partial_t P}{c^2} \mathbf{v} \right). \quad (2.6e)$$

§2.5. Момент импульса

Момент импульса (*angular momentum*) в классической механике для одной точечной частицы определяется как векторное произведение, $\mathbf{L} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]$. Его сохранение выражает тот факт, что законы движения изотропны.

Для того, чтобы расширить определение момента импульса на 4-х мерное пространство-время, сделаем несколько наблюдений. Во-первых, аксиальному вектору момента импульса $\mathbf{L}$ соответствует тензор второго ранга L^{ik} . Таким образом, моменту импульса должен соответствовать тензор второго ранга $L^{\mu\nu}$. Во-вторых, как мы установили в случае с полным зарядом Q и полным 4-импульсом P^μ , 4-токи этих величин являются тензорами рангов на один больше, то есть ранга 1 и 2 соответ-

ственно. Проверим, что это уравнение действительно переходит в простое уравнение Эйлера в нерелятивистском пределе. В этом пределе плотность собственной энергии есть почти плотность энергии покоя $\varepsilon \approx n m c^2 = \rho_m c^2$, по сравнению с которой давление мало, $P \sim m v_T^2 \ll \varepsilon$, где v_T — тепловая скорость частиц. Кроме того, в круглой скобке в правой части (2.6e) второе слагаемое относительно мало как v^2/c^2 . В результате действительно приходим к нерелятивистскому уравнению Эйлера

$$\rho_m (\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) = -\nabla P. \quad (2.6f)$$

В частности, этот результат оправдывает то, что мы называли величину P давлением.

2-4.2.1 Безмассовые частицы

Посмотрим, во что перейдёт этот инвариант для безмассовых частиц. Для таких частиц вектор скорости $\mathbf{v} = \vec{c}$, где $\vec{c}$ — 3-х мерный вектор, по модулю равный скорости света и задающий направление распространения частиц. Соотношением между плотностями энергии и импульса является $\mathbf{p} = \vec{c} E/c^2$, см. (2.1m). Из (2.5a) тогда вытекает, что след тензора энергии-импульса равен нулю,

$$T^\mu_\mu = 0 \quad \text{for massless particles.} \quad (2.5da)$$

Если в (2.5d) мы рассмотрим ультра-релятивистские частицы, устремив $\gamma \rightarrow \infty$, то мы получим, что след тензора энергии-импульса параметрически мал по сравнению с характерным значением его элемента,

$$T^{(m)0}_0 \gg T^{(m)\mu}_\mu,$$

что в определённом смысле можно трактовать так, что след тензора энергии-импульса равен нулю.

Поэтому в случае с полным моментом импульса $L^{\mu\nu}$ его поток является тензором ранга 3. Наконец, в-третьих, тензор момента импульса должен быть антисимметричным, поскольку в трёхмерном пространстве имеет место аналогичное свойство $L^{ik} = -L^{ki}$.

Покажем, что определением тензора момента импульса является

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{c} \int d^3 \mathbf{r} (x^\mu T^{\nu 0} - x^\nu T^{\mu 0}) = \frac{1}{c} \int d^3 \mathbf{r} S^{0\mu\nu},$$

$$L^{\mu\nu} = -L^{\nu\mu}, \quad S^{\lambda\mu\nu} = (x^\mu T^{\nu\lambda} - x^\nu T^{\mu\lambda}), \quad (2.7)$$

где $S^{\lambda\mu\nu}$ — поток момента импульса; ниже мы увидим, что для определения момента импульса важно, что тен-

зор энергии-импульса симметричен. Связь между потоком момента импульса $S^{\lambda\mu\nu}$ и его интегральным значением $L^{\mu\nu}$ аналогична связи (2.3h) между потоком импульса $T^{\mu\nu}$ и его полным значением P^μ . Поток момента импульса по своей природе определён неоднозначно, поскольку его определение зависит от выбора начала системы координат. (Отметим также, что момент импульса $L^{\mu\nu}$ не изменяется при преобразовании тензора энергии-импульса (2.4d), не изменяющем его симметрии.)

Используя равенство нулю 4-дивергенции тензора энергии-импульса (2.3e) и его симметричность (2.3c), можно убедиться, что 4-дивергенция потока момента импульса равна нулю,

$$\partial_\lambda S^{\lambda\mu\nu} = 0. \quad (2.8)$$

Как из (2.3e) следует закон сохранения импульса (2.3h), так из этого равенства следует закон сохранения момента импульса $L^{\mu\nu}$ (2.7). Отметим, равенство (2.8) не выполняется, если тензор энергии-импульса не симметричен. Таким образом, без свойства симметричности тензора энергии-импульса определение тензора момента импульса теряет свой смысл. Поэтому, хотя тензор энергии-импульса можно записать и в несимметричной форме, см. Пункт 2-3.2, но симметричная форма имеет то преимущество, что она даёт возможность определить момент импульса.

Поскольку тензор четырёх-мерного момента импульса антисимметричен (является би-вектором), то его компоненты образуют два трёхмерных вектора, один полярный, и один аксиальный, см. определения Пункта 8-3.1 для антисимметричного тензора второго ранга.

Аксиальный вектор есть ранее введённый трёхмерный вектор момента импульса $\mathbf{L}$,

$$L^{ik} = \int d^3\mathbf{r} (x^i p^k - x^k p^i) = \epsilon_{ikm} L^m, \quad (2.9a)$$

где $\vec{p}$ – пространственная плотность 3-х мерного импульса.

Полярный вектор определяет пространственно-временные компоненты 4-тензора момента импульса:

$$L^{i0} = t \int d^3\mathbf{r} p^i - \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{r} x^i \mathcal{E} \equiv \frac{E}{c} (V^i t - \bar{R}^i), \quad (2.9b)$$

где $\mathcal{E}$ – пространственная плотность энергии. Мы определили скорость $\mathbf{V}$ движения центра масс и $\bar{\mathbf{R}}$ – текущее положение центра масс:

$$\mathbf{V} = \frac{c^2 \mathbf{P}}{E}, \quad \bar{\mathbf{R}} = \frac{1}{E} \int d^3\mathbf{r} \mathbf{r} \mathcal{E}. \quad (2.9c)$$

Здесь E и $\mathbf{P}$ – полные энергия и импульс системы, определённые согласно (2.3h). Определение скорости центра масс $\mathbf{V}$ соответствует частному случаю одной частицы (2.1g). Положение центра масс $\bar{\mathbf{R}}$ определяется через плотность энергии, что можно интерпретировать как следствие эквивалентности массы и энергии, см. например (2.1g). Поскольку сохраняются во времени в том числе и компоненты L^{i0} четырёх-мерного момента импульса, то центр масс движется со скоростью $\mathbf{V}$,

$$\frac{d\bar{\mathbf{R}}}{dt} = \mathbf{V}. \quad (2.9d)$$

Итак, 4-х мерный тензор момента импульса есть

$$\|L^{\mu\nu}\| = \left(\frac{E}{c} (\mathbf{V}t - \bar{\mathbf{R}}), \mathbf{L} \right), \quad (2.9e)$$

Его компоненты содержат неоднозначность, связанную с выбором начала координат: если начало координат сместить на вектор $-R'^\mu = -(ct', \mathbf{R}')$, то компоненты момента импульса изменятся согласно правилу

$$L^{\mu\nu} \rightarrow L^{\mu\nu} + R'^\mu P^\nu - R'^\nu P^\mu. \quad (2.9f)$$

2-5.1 Внутренний орбитальный момент

Возможно, однако, найти линейную комбинацию компонент тензора момента-импульса, которая остаётся инвариантной при сдвиге начал координат. Такой линейной комбинацией является *псевдо-4-вектор Паули-Любанского* (*Pauli–Lubanski pseudovector*)

$$S_\mu = \epsilon_{\mu\rho\sigma\zeta} u^\rho L^{\sigma\zeta}, \quad u^\mu = \frac{P^\mu}{\sqrt{P^\sigma P_\sigma}}; \quad S_\mu u^\mu = 0. \quad (2.10)$$

Преобразование (2.9f) не изменяет 4-вектор S_μ , поскольку добавка в (2.9f) приводит к появлению вклада в $u^\rho L^{\sigma\zeta}$ в (2.10), квадратичного по импульсу P^μ , и потому дающего ноль при его свёртке с символом Леви-Чивиты. Таким образом, S^μ является полноценным релятивистским 4-вектором, в том числе обладая и инвариантностью по отношению к трансляциям. Поэтому этот вектор является характеристикой исключительно вращающейся системы. Вычислим его в системе координат, в которой центр тяжести системы покоится, т.е. $\mathbf{V} = 0$ в (2.9c):

$$\mathbf{S} = \int d^3\mathbf{r} [\mathbf{r} \times \vec{p}] = \mathbf{L}, \quad S^0 = 0, \quad \text{if} \quad \int d^3\mathbf{r} \vec{p} \equiv \mathbf{P} = 0. \quad (2.11)$$

Псевдо-вектор Паули-Любанского можно ввести только для массивных частиц, поскольку для безмассовых частиц невозможно определить 4-скорость.

Глава 3

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

1	Движение заряженной частицы в электромагнитном поле	42
1.	Вклад в действие, лагранжиан и гамильтониан	42
2.	Уравнения движения	43
3.	Тензор электромагнитного поля	43
4.	Уравнения движения в трёхмерной форме	44
5.	Задачи	44
2	Свойства электромагнитного поля	45
1.	Калибровочная инвариантность	45
2.	Преобразование Лоренца для компонент электромагнитного поля	45
3.	Первая пара уравнений Максвелла	46
4.	Релятивистские инварианты электромагнитного поля	46
3	Движение частицы в однородном поле	47
1.	Движение в однородном электрическом поле	47
2.	Движение в однородном магнитном поле	47
3.	Дрейф частицы в скрещенных сильном магнитном и слабом электрическом полях	47
4.	Дополнительные задачи	48
4	Движение нерелятивистской частицы в слабо неоднородном магнитном поле	49
1.	Задачи	50
2.	Движение в неоднородных полях	51
5	Движение частиц со спином	51
1.	Уравнение движения спина в однородном поле	51
2.	Задачи	53

§3.1. Движение заряженной частицы в электромагнитном поле

Из уравнений Максвелла, являющихся обобщением эмпирических данных, известно, что электрические и магнитные явления определяются электромагнитным полем — совокупностью электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{B}$ трёх-мерных векторных полей. Хотя в сумме электромагнитное поле характеризуется шестью компонентами, три из них не являются независимыми вследствие второй пары уравнений Максвелла, см. ниже (3.20). Уже на этом этапе наиболее простым является предположение, что в ковариантных терминах электромагнитное поле должно задаваться некоторым 4-вектором A^μ . Действительно, такая параметризация электромагнитного поля возможна, см. (3.14), при этом вторая пара уравнений Максвелла оказывается автоматически удовлетворённой. Среди четырёх компонент A^μ одна компонента является лишней, поскольку в электромагнитном поле независимыми являются всего три компоненты. Эта избыточность приводит к неоднозначному соответствию поля A^μ физически определённого электромагнитного поля, о чём говорят как о калибровочной инвариантности, см. (3.17a).

Поле A^μ называется *4-потенциалом электромагнитного поля*. Удобно выделить в 4-потенциале нулевую и три пространственных компоненты, представив

его в виде

$$A^\mu = \{\varphi, \mathbf{A}\}. \quad (3.1)$$

Величина φ называется *скалярным потенциалом*, вектор $\mathbf{A}$ называется *вектор-потенциалом*.

То, что электромагнитное поле задаётся 4-потенциалом A^μ , конечно, не является само разумеющимся. Справедливость этого будет подтверждена ниже, когда будут получены знакомые из общей физики сила Лоренца (3.15) и уравнения Максвелла (3.20, 4.6).

3-1.1 Вклад в действие, лагранжиан и гамильтониан

Вклад в действие, ответственный за взаимодействие частицы и электромагнитного поля, должен иметь вид интеграла вдоль мировой линии частицы. Поскольку A^μ — векторная величина, то для получения скаляра она должна быть скалярно домножена на другую векторную величину, относящуюся к движению частицы. Единственной такой величиной является приращение 4-вектора положения частицы при перемещении вдоль мировой линии dx^μ . С учётом постоянных множителей, которые необходимо добавить для дальнейшего получения уравнений движения в привычной форме, искомый

вклад в действие приобретает вид

$$S_{\text{int}} = - \sum_a \frac{e_a}{c} \int A_\mu(x_a) dx_a^\mu = - \frac{1}{c^2} \int d\Omega A_\mu j^\mu. \quad (3.2)$$

Сумма производится по всем частицам в системе. При преобразовании действия от одного вида к другому мы воспользовались формулой (1.9b) и выражением (1.8a) для элемента 4-объёма. Здесь мы решаем задачу о нахождении траектория движения частицы в заданном электромагнитном поле. Поэтому нам более подходит первый вид, в котором интегрирование происходит вдоль мировых линий частиц.

Второй вид действия в (3.2) записан в терминах непрерывной среды. Он может быть более удобен для определения отклика поля на движение заряженных частиц. Разумеется, действие во второй форме (3.2) также релятивистски инвариантно, поскольку релятивистски инвариантны как элемент 4-объёма $d\Omega$, так и скалярное произведение двух векторов.

Для простоты будем в дальнейшем рассматривать одну частицу, траектория которой есть $\mathbf{r}(t)$.

3-1.1.1 Трёх-мерный вид лагранжиана и гамильтониана

Перепишем действие (3.2) в трёхмерных обозначениях. Приращения 4-координаты вдоль мировой линии $\|dx^\mu\| = \{c, \mathbf{v}\}dt$, поэтому первый (дискретный) вариант записи действия (3.2) представим виде

$$S_{\text{int}} = \int L_{\text{int}} dt, \quad L_{\text{int}} = \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} - e\varphi.$$

Для того, чтобы получить полный лагранжиан L массивной заряженной частицы в электромагнитном поле, этот вклад надо сложить с вкладом для свободной частицы (2.1b):

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} - e\varphi. \quad (3.3)$$

Вектор-потенциал $\mathbf{A}$ и скалярный потенциал φ должны браться в точке положения частицы $\mathbf{r}$.

Обобщённый импульс $\mathbf{p}_{\text{gen}}$, канонически сопряжённый с координатой частицы $\mathbf{r}$, находится по общей формуле (7.4a):

$$\mathbf{p}_{\text{gen}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}, \quad \mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}, \quad (3.4)$$

где простой импульс частицы $\mathbf{p}$ дан выражением (2.1g). Гамильтониан $\mathcal{H}$ заряженной массивной частицы во внешнем поле равен

$$\mathcal{H} = \gamma mc^2 + e\varphi,$$

то есть полная энергия равна сумме энергии покоя $E_0 = mc^2$, кинетической энергии $E_{\text{kin}} = (\gamma - 1)mc^2$ и потенциальной энергии заряда во внешнем поле $e\varphi$. Перепишем

гамильтониан в более естественном для него виде, как функцию координаты и обобщённого импульса:

$$\mathcal{H} = \sqrt{m^2 c^4 + \left(\mathbf{p}_{\text{gen}} - \frac{e}{c} \mathbf{A}\right)^2 c^2} + e\varphi, \quad (3.5)$$

сравни с (2.1h). Если имеет место нерелятивистский предел, то второе слагаемое под корнем мало, так что гамильтониан

$$\mathcal{H} = mc^2 + \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p}_{\text{gen}} - \frac{e}{c} \mathbf{A}\right)^2 + e\varphi. \quad (3.6)$$

Без первого слагаемого этот гамильтониан имеет вид *гамильтониана Паули* (без вклада от спина частицы), используемого в квантовой механике для описания движения заряженной нерелятивистской частицы в электромагнитном поле.

Из вида гамильтониана (3.5) получаем уравнение Гамильтона-Якоби (7.12), которое имеет смысл записать в ковариантном виде

$$g^{\mu\nu} (\partial_\mu S - A_\mu) (\partial_\nu S - A_\nu) = m^2 c^2. \quad (3.7)$$

3-1.2 Уравнения движения

Проведём варьирование действия

$$S = S_m + S_{\text{int}}$$

таким же образом, как это было сделано для действия для свободной частицы S_m (2.1a). Для сокращения записи будем предполагать вариацию пути равной нулю на концах, поскольку мы уже нашли гамильтониан (3.5) и обобщённый импульс (3.4). Вариация действия равна

$$\delta S = \int \frac{dp^\mu}{ds} ds \delta x_\mu - \frac{e}{c} \int \left(A_\mu \frac{d\delta x^\mu}{ds} + \delta A_\nu \frac{dx^\nu}{ds} \right) ds. \quad (3.8)$$

Первое слагаемое в действии мы написали, воспользовавшись (2.1d). Первое слагаемое в круглой скобке проинтегрируем по частям. Во втором слагаемом изменение 4-потенциала при вариации происходит потому, что он зависит от координаты, которая изменилась при вариации. В процессе преобразования пользуемся соотношениями

$$\frac{dA_\mu}{ds} = u^\nu \partial_\nu A_\mu, \quad \delta A_\nu = \delta x^\mu \partial_\mu A_\nu, \quad dx^\nu = u^\nu ds.$$

В результате приходим к тому, что

$$\delta S = \int ds \left(\frac{dp_\mu}{ds} - \frac{e}{c} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) u^\nu \right) \delta x^\mu. \quad (3.9)$$

Таким образом, уравнение движения в ковариантной форме есть

$$\frac{dp_\mu}{ds} = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u^\nu, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3.10)$$

3-1.3 Тензор электромагнитного поля

Итак, уравнение движения (3.10) гласит, что импульс заряженной изменяется под действием электромагнитного поля, которое зашито в тензоре второго ранга $F^{\mu\nu}$. Этот тензор называется *тензором электромагнитного поля* (*electromagnetic tensor*). Из его определения следует, что он антисимметричен по своим индексам,

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}. \quad (3.11)$$

Это означает, что он содержит всего 6 независимых компонент, а его диагональные элементы равны нулю, $F^{\mu\mu} = 0$. Выпишем явно матричную структуру тензора электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} \|F_{\mu\nu}\| &= \downarrow_{\mu} \begin{pmatrix} 0 & E^j \\ -E^i & -\epsilon_{ijk} B^k \end{pmatrix} = \begin{matrix} \mu \rightarrow i \\ \nu \rightarrow j \end{matrix} \\ &= \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & E^x & E^y & E^z \\ \hline -E^x & 0 & -B^z & B^y \\ -E^y & B^z & 0 & -B^x \\ -E^z & -B^y & B^x & 0 \end{array} \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Величина $\mathbf{E}$ ведёт себя как вектор, а $\mathbf{B}$ — как псевдовектор (аксиальный вектор) в трёхмерном пространстве. Поле $\mathbf{E}$ называется *электрическим полем*, а поле $\mathbf{B}$ — *магнитным полем*. Эти названия будут оправданы ниже, когда мы запишем уравнение движения частицы (3.10) в трёхмерной форме, см. Пункт 3-1.4. Тензор электромагнитного поля можно кратко переписать в виде бивектора

$$\|F_{\mu\nu}\| = (\mathbf{E}, -\mathbf{B}), \quad \|F^{\mu\nu}\| = (-\mathbf{E}, -\mathbf{B}), \quad (3.13)$$

см. определение (8.40).

Свяжем электрическое и магнитное поля непосредственно с 4-потенциалом. Для этого распишем определение тензора электромагнитного поля (3.10) для различных его компонент, см. (3.12):

$$\begin{aligned} F^{i0} &= E^i = -\partial_i A^0 - \partial_0 A^i, \quad (\mu = i, \nu = 0), \\ F^{ij} &= -\epsilon_{ijk} B^k = -\partial_i A^j + \partial_j A^i \quad (\mu = i, \nu = j). \end{aligned}$$

Первое уравнение просто перепишем в векторном виде, воспользовавшись определением (3.1) для скалярного и векторного потенциалов, а во втором уравнении перед этим произведём свёртку с ϵ_{lij} . В результате получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} - \text{grad } \varphi, \\ \mathbf{B}^l &= \epsilon_{lij} \partial_i A^j \Leftrightarrow \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

3-1.4 Уравнения движения в трёхмерной форме

Рассмотрим пространственные компоненты уравнения движения частицы (3.10), положив $\mu = i$:

$$\frac{\gamma}{c} \frac{dp^i}{dt} = \frac{e}{c} (F^{i0} u^0 - F^{ik} u^k) = \frac{\gamma}{c} \left(eE^i + \frac{e}{c} \epsilon_{ikl} B^l v^k \right),$$

где мы воспользовались тем, что $ds = c dt/\gamma$. Таким образом, мы получили силу $\mathbf{F}$, действующую на частицу со стороны электромагнитного поля, которая называется *силой Лоренца*:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \quad (3.15)$$

Выражение (3.15) отличается от нерелятивистского выражения тем, что в (3.15) производная по времени берётся от релятивистского импульса $\mathbf{p}$ (2.1g). Справа стоит уже известная из нерелятивистской электродинамики сумма сил со стороны электрического поля, $e\mathbf{E}$, и со стороны магнитного, $e[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]/c$.

Уравнение на временную компоненту (3.10) не является независимым, поскольку компоненты 4-импульса связаны ограничением (2.1h). Тем не менее, оно обладает физическим смыслом: оно даёт мощность, передаваемую от поля к частице,

$$\frac{dE_{\text{kin}}}{dt} = \left(\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right) = e(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}), \quad (3.16)$$

где E_{kin} — кинетическая энергия (2.1j). Энергию частице передаёт только электрическое поле, тогда как магнитное поле не совершает работы над зарядом. Полная энергия частицы (3.5) при этом сохраняется.

3-1.5 Задачи

• **Задача 1:** Нерелятивистская заряженная частица совершает колебания в одномерном потенциальном поле $U(x)$ с периодом T_0 . В некоторый момент включается модулированное по амплитуде быстропеременное электрическое поле $E(x) \cos(\omega t)$, $\omega \gg 1/T_0$. Произвести усреднение по быстрым осцилляциям электрического поля и получить уравнение, которое описывало бы усреднённое медленное движение частицы (ведущего центра) в результирующем поле. Оценить пределы применимости описания на основе усреднённого уравнения. Получить закон движения частицы для случая $U_0 = -\kappa x^2/2$, $E(x) = \alpha x$.

§3.2. Свойства электромагнитного поля

Итак, в §1 было получено, что взаимодействие электромагнитного поля с заряженной частицей определяется тензором электромагнитного поля (3.10)

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

где A_μ – 4-потенциал электромагнитного поля (3.1). Компоненты тензора электромагнитного поля приведены в (3.12), они представляют из себя совокупность компонент электрического и магнитного полей.

В этом параграфе мы установим основные свойства электромагнитного поля, следующие из его определения.

3-2.1 Калибровочная инвариантность

Теория электромагнитного поля отличается от моделей классической механики в том числе и тем, что формулировка уравнений движения поля происходит не в физически измеримых переменных — компонентах электромагнитного поля, — а в терминах 4-потенциала, непосредственно не измеряемого. Более того, каждому фиксированному распределению электромагнитного поля соответствует бесконечно много распределений 4-потенциала. Эти 4-потенциалы переходят друг в друга путём так называемого *калибровочного преобразования*.

Действительно, обратимся к исходному действию (3.2), в котором стоит скалярное произведение 4-потенциала на 4-ток. В силу уравнения непрерывности, т.е. закона сохранения заряда (1.8e), одна из компонент 4-тока является зависимой от 3-х остальных. Поэтому и одна из компонент 4-потенциала является с точки зрения информативности лишней.

Калибровочное преобразование 4-потенциала — это такое его изменение, в результате которого действие остаётся прежним при учёте уравнения непрерывности (1.8e). Калибровочное преобразование имеет вид

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f, \quad (3.17a)$$

где f — произвольная функция координат и времени. В результате такой замены действие действительно не изменится, поскольку в результате интегрирования по частям его изменение δS_{int} приводится к виду

$$\delta S_{\text{int}} = -\frac{1}{c^2} \int d\Omega j^\mu \partial_\mu f = \frac{1}{c^2} \int d\Omega f \partial_\mu j^\mu = 0.$$

(Мы проинтегрировали по частям в предположении, что на бесконечности f убывает, что не ограничивает общности рассуждений). В том, что движение частицы не изменится при замене A^μ (3.17a) можно убедиться и по-другому, посчитав при такой замене изменение тензора электромагнитного поля (3.10): это изменение равно нулю, поскольку результат двойного дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования.

Таким образом, и старое и новое A^μ соответствуют одним и тем же $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. Про тот факт, что уравнения движения инвариантны по отношению к замене (3.17a), говорят как о *калибровочной инвариантности*.

3-2.1.1 Калибровки частного вида

Не смотря на то, что в свете калибровочной инвариантности отдельные компоненты 4-потенциала не имеют самостоятельного физического смысла, по соображениям математического удобства часто работают в калибровках определённого вида.

Наиболее известной калибровкой является *калибровка Лоренца*, в которой

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (3.17b)$$

Эта калибровка соответствует уравнению непрерывности для 4-тока (1.8e) и потому удобна для нахождения поля по заданному току. Условие калибровки Лоренца (3.17b) имеет релятивистски инвариантный вид, поэтому если в какой-то системе координат оно выполнено, то оно выполнено во всех системах координат. Это условие калибровки не фиксирует единственным образом 4-потенциал: если функция f в (3.17a) является гармонической функцией, то новый 4-потенциал также бездивергентен,

$$g^{\mu\nu} \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu f) = \partial_\mu A^\mu = 0, \quad \text{if } \square f = 0. \quad (3.17c)$$

Используется также другая калибровка, называемая *кулоновой калибровкой* (*Coulomb gauge*), задаваемая условием

$$\text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (3.17d)$$

Если используется эта калибровка, то уравнение на скалярный потенциал φ воспроизводит статическое уравнение Кулона на потенциал электрического поля. Кулонова калибровка релятивистски неинвариантна: если она имеет место в одной системе координат, то в общем случае в другой системе координат условие (3.17d) не будет выполнено.

В *калибровке Вейля* (*Weyl gauge*) скалярный потенциал равен нулю, $\varphi = 0$. Это калибровочное условие также релятивистски неинвариантно.

3-2.2 Преобразование Лоренца для компонент электромагнитного поля

Исследуем, как преобразуются компоненты электромагнитного поля при переходе из одной системы координат в другую. На этот вопрос относительно легко ответить в терминах 4-потенциала A^μ , потому что он как 4-вектор преобразуется по закону типа (1.7h). Тем не менее, интересней ответить на вопрос о преобразовании непосредственно в терминах электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{B}$

полей, поскольку именно они определяют силу воздействия на частицу со стороны поля.

Поскольку электрическое и магнитное поля составляют вместе тензор электромагнитного поля, то надо исходить из закона преобразования тензора второго ранга:

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda'^{\mu}_{\lambda} \Lambda'^{\nu}_{\sigma} F^{\lambda\sigma}. \quad (3.18a)$$

В качестве преобразования выберем лоренцевский буст (1.4a, 1.4c), что упростит вычисления, но не ограничит физической общности результата. В матричной форме записи уравнение (3.18a) приобретает вид

$$\|F'^{\mu\nu}\| = \begin{pmatrix} \hat{\lambda} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{f}_{11} & \hat{f}_{12} \\ -\hat{f}_{12}^T & \hat{f}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\lambda} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix},$$

где мы разбили матрицу тензора электромагнитного поля F на блоки 2×2 (их матричные элементы легко найти из (3.12)). Непосредственной проверкой легко убедиться, что $\hat{\lambda} \hat{f}_{11} \hat{\lambda} = \hat{f}_{11}$, поскольку $\hat{f}_{11}^T = -\hat{f}_{11}$. В результате получаем, что при преобразовании (3.18a) матрицы тензора электромагнитного поля изменяется только недиагональный блочный элемент $\hat{f}_{12}$,

$$\hat{f}'_{12} = \hat{\lambda} \hat{f}_{12}.$$

Воспользовавшись теперь явным видом тензора электромагнитного поля (3.12), заключаем, что продольные компоненты (по отношению к скорости взаимного движения систем отсчёта, т.е. в нашем случае x -компоненты) обоих полей не изменяются, а изменяются только поперечные компоненты (те y, z -компоненты). Для произвольного направления скорости относительного движения систем координат закон преобразования можно выписать в следующей форме:

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}_{\perp}]), \quad (3.18b)$$

$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}, \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}_{\perp}]).$$

где, напомним, $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{V}/c$ — вектор безразмерной скорости относительного движения систем координат, см. (1.4c).

3-2.3 Первая пара уравнений Максвелла

Поскольку компоненты $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ являются производными от компонент 4-потенциала A^{μ} , то они не полностью независимы друг от друга и между ними есть связи.

Действительно, рассмотрим псевдо-тензор $\tilde{F}^{\mu\nu}$, дуальный тензору электромагнитного поля $F^{\lambda\sigma}$, см. Пункт 8-3.1.1:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \partial_{\lambda} A_{\sigma}. \quad (3.19a)$$

Матричными компонентами $\tilde{F}^{\mu\nu}$ являются те же компоненты $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, но поменянные местами с изменением знака у $\mathbf{E}$: в обозначениях (8.40)

$$\|\tilde{F}^{\mu\nu}\| = (-\mathbf{B}, \mathbf{E}).$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что 4-дивергенция тензора $\tilde{F}^{\mu\nu}$ равна нулю,

$$\partial_{\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \partial_{\nu} \partial_{\lambda} A_{\sigma} = 0, \quad \Leftrightarrow \quad (3.19b)$$

$$\Leftrightarrow \quad \partial_{\nu} F_{\mu\lambda} + \partial_{\lambda} F_{\nu\mu} + \partial_{\mu} F_{\lambda\nu} = 0,$$

поскольку результат двойного дифференцирования не зависит от его порядка. Уравнение (3.19b) содержит в себе 4 скалярных уравнения, которые в трёхмерном виде могут быть переписаны как

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (3.20)$$

Эти уравнения составляют *первую пару уравнений Максвелла*.

Уравнения Максвелла (3.20) могут быть получены и непосредственно из трёхмерных определений (3.14).

3-2.4 Релятивистские инварианты электромагнитного поля

Из компонент электромагнитного поля можно составить комбинации, сохраняющие своё значение в любой системе координат. Эти комбинации называются *инвариантами электромагнитного поля*, этих инвариантов два:

$$\frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2, \quad -\frac{1}{4} \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}). \quad (3.21)$$

Обе этих величины являются скалярами с точки зрения тензорного исчисления, то есть являются релятивистскими инвариантами. Точнее, вторая величина является псевдо-скаляром, поскольку при операции пространственной инверсии она меняет знак.

Других инвариантов электромагнитного поля не существует. Чтобы показать это ... смотри Ландау и Лифшиц, 1988, Конец § 25.

§3.3. Движение частицы в однородном поле

Движение частицы в однородных электрическом поле $\mathbf{E}$ и магнитном поле $\mathbf{B}$ удобно исследовать в такой системе отсчёта K' , в которой электромагнитное поле имеет наиболее простой вид. В любой системе отсчёта остаются неизменными инварианты (3.21). Их значения потому определяют вид движения частицы в системе K' , которое в лабораторной системе отсчёта деформируется в результате обратного перехода из системы K' обратно в лабораторную систему координат K .

Рассмотрим сначала наиболее общий случай, когда электрическое и магнитное поля не нуль и не ортогональны друг другу, так что псевдоскаляр

$$(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \neq 0.$$

Возможно выбрать систему K' так, чтобы в ней электрическое $\mathbf{E}'$ и магнитное $\mathbf{B}'$ поля были параллельны друг другу. В этой системе отсчёта их амплитуда и взаимное направление определяются инвариантами поля (3.21).

Определим систему K' . Пусть она движется с некоторой (безразмерной) скоростью β . В этой системе

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= \gamma(\mathbf{E} + [\beta \times \mathbf{B}]), \\ \mathbf{B}' &= \gamma(\mathbf{B} - [\beta \times \mathbf{E}]).\end{aligned}\quad (3.22a)$$

Требование параллельности векторов можно сформулировать как условие равенства нулю их векторного произведения, $[\mathbf{E}' \times \mathbf{B}'] = 0$. Из этого условия получаем уравнение на скорость β

$$(1 + \beta^2)[\mathbf{E} \times \mathbf{B}] + (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)\beta = 0. \quad (3.22b)$$

Ввиду условия $\beta < 1$ это уравнение имеет единственный корень

$$\beta = \frac{\sqrt{(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)^2 - 4[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]^2} - \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2}{2[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]. \quad (3.22c)$$

Итак, система K' движется в направлении, ортогональном плоскости, образованной векторами полей.

Скрещенные поля Если электрическое и магнитное поля ортогональны друг другу, так что $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$, то такие поля называются *скрещенными*. Второй (псевдо-)инвариант электромагнитного поля (3.21) для скрещенных полей равен нулю,

$$(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) = 0.$$

Ввиду сохранения инварианта (3.21) $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$ в системе отсчёта K' исчезает то поле, которое меньше по амплитуде в лабораторной системе координат. В этих двух случаях частица испытывает движения разного типа, поэтому два случая следует разбирать отдельно.

Специальным случаем является скрещенные поля, равные по амплитуде, так что оба инварианта равны нулю. В таком случае в любой системе отсчёта будут иметь место всё так же ненулевые, скрещенные и равные по амплитуде поля.

3-3.1 Движение в однородном электрическом поле

3-3.2 Движение в однородном магнитном поле

Положим теперь, что есть только магнитное поле $\mathbf{B}$. Примем, что оно направлено вдоль оси Oz .

Поскольку есть только магнитное поле, которое не совершает работы, то движение частицы характеризуется постоянной по модулю скоростью, так что $\gamma = \text{const}$. Согласно уравнению (3.15), движение распадается на вращение в плоскости Oxy и на равномерное движение вдоль оси Oz ,

$$\frac{d\mathbf{v}^\perp}{dt} = \omega_B[\mathbf{v}^\perp \times \mathbf{e}_z], \quad \omega_B = \frac{eB}{\gamma mc}; \quad \frac{dv^z}{dt} = 0. \quad (3.23a)$$

Частоту обращения ω_B называют *циклотронной частотой*. Она не зависит от скорости частицы, если она нерелятивистская. Если же частица становится релятивистской, то циклотронная частота уменьшается вследствие роста γ -фактора.

Выберем начало отсчёта времени t и координат так, чтобы круговая траектория в плоскости Oxy описывалась уравнениями

$$x(t) = \xi \cos(\omega_B t), \quad y(t) = \xi \sin(\omega_B t), \quad \xi = \frac{v^\perp}{\omega_B}. \quad (3.23b)$$

Отметим, что в наших обозначениях радиус орбиты вращения ξ (его называют *ларморовский* или *циклотронный радиус*) может быть как положительным, так и отрицательным, в зависимости от знака заряда. При смене знака заряда меняется направление вращения по орбите.

Ларморовский радиус (его абсолютное значение) растёт с ростом скорости частицы,

$$|\xi| \propto \gamma v^\perp.$$

Этот рост особенно ускоряется для ультрарелятивистских частиц.

3-3.3 Дрейф частицы в скрещенных сильном магнитном и слабом электрическом полях

Вслед за движением в однородном поле, рассмотрим движение в скрещенных полях, когда электрическое поле

слабее магнитного. Хотя задача сводится к уже рассмотренной для однородного магнитного поля, $|\mathbf{E}| < |\mathbf{B}|$, но поучительным является построение траектории частицы в лабораторной системе координат.

Выберем декартову систему отсчёта, в которой магнитное поле направлено вдоль третьей оси, $\mathbf{B} \parallel Oz$, а электрическое поле направлено вдоль первой оси, $\mathbf{E} \parallel Ox$; будем считать, что $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ — z и x -компоненты магнитного и электрического полей соответственно. Система K' движется вдоль оси Oy , в наших обозначениях V есть y -компонента скорости движения этой системы.

Из первого уравнения в законе преобразования полей (3.18b) (или непосредственно из уравнения (3.22c)) следует, что скорость движения системы K' должна быть равна

$$\mathbf{V} = \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]}{B^2} c, \quad V = -\frac{E}{B} c, \quad \gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

В движущейся системе отсчёта K' магнитное поле равно

$$B' = \frac{1}{\gamma_v} B, \quad E' = 0. \quad (3.23c)$$

В любой другой системе отсчёта K'' , двигающейся вдоль оси Oz относительно системы отсчёта K' , электромагнитное поле останется тем же самым (3.23c). При такой смене системы отсчёта изменяться только начальные условия для скорости и положения частицы.

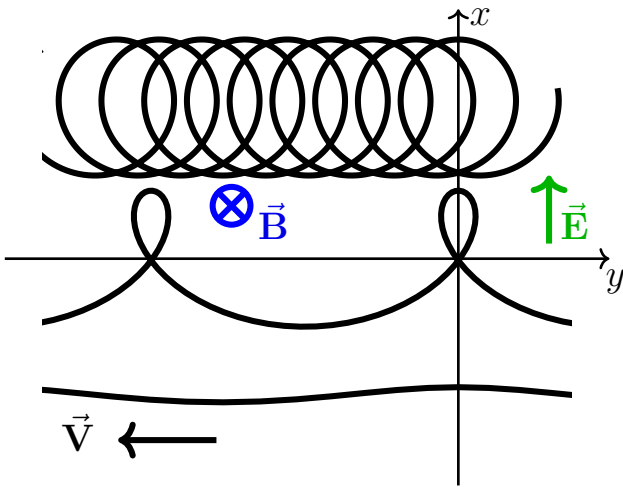


Рис. 3.1 Проекция траектории движения заряженной положительно частицы на плоскость Oxy при её дрейфе (3.23d) в скрещенных полях в разных предельных случаях. Сверху вниз: $V/v'^{\perp} = 0.625$, $\gamma_v = 1.15$; $V/v'^{\perp} = 0.1$, $\gamma_v \approx 1$; $V/v'^{\perp} = 10$, $\gamma_v \approx 1$. Магнитное поле направлено от зрителя в плоскость рисунка.

Движение в системе K' было разобрано нами в выше Пункте 3-3.2. Здесь мы снабжаем все величины, записанные в этой системе, штрихом, так что круговая

траектория частицы (3.23b) имеет вид

$$x'(t') = \xi' \cos(\omega'_B t'), \quad y'(t') = \xi' \sin(\omega'_B t'), \quad \xi' = \frac{v'^{\perp}}{\omega'_B}.$$

После перехода в лабораторную систему координат получаем траекторию, записанную через время t' как через параметр

$$\begin{aligned} x &= \xi' \cos(\omega'_B t'), & y &= \gamma_v (\xi' \sin(\omega'_B t') + V t'), \\ t &= \gamma_v \left(t' + \frac{V \xi'}{c^2} \sin(\omega'_B t') \right) + t_0. \end{aligned} \quad (3.23d)$$

Таким образом, частица в среднем по времени смещается в направлении Oy со скоростью V , которая называется *скоростью дрейфа* (drift velocity). Параметрами, зависящими от начальных условий, в (3.23d) являются радиус орбиты (в системе K') ξ' и начало отсчёта времени t_0 .

3-3.4 Дополнительные задачи

• **Задача 1:** Заряд движется в скрещенных магнитном и электрическом полях $H > E$. Может ли заряд в таких полях двигаться равномерно и прямолинейно? Если да, то приведите пример. Что называют инвариантами электромагнитного поля?

• **Задача 2:** Частица массы m и заряда e движется в параллельных электрическом $\mathbf{E}$ и магнитном $\mathbf{B}$ полях; электрическое поле слабое, так что $E \ll B$. Ось координат Oz направим вдоль этих полей. Начальная скорость частицы лежит в плоскости Oxy и по модулю равна v_0 . Найти дальнейшее движение частицы. В частности определить, как часто на малых и больших временах проекция скорости частицы на плоскость Oxy восстанавливает своё направление, а сама частица совершает (незамкнутые) обороты.

Указания:

- Записать уравнение движения по оси Oz и уравнение на изменение полной кинетической энергии частицы: при этом уравнение движения записать через проекции импульса p^z и $p^{\perp}$ на ось Oz и на плоскость Oxy соответственно (через них выразить и γ -фактор). Начальную скорость считать произвольной, не обязательно малой по сравнению со скоростью света. В результате, в частности, станет известной зависимость γ -фактора от времени.
- Записать уравнение движения частицы в плоскости Oxy , представив проекцию её скорости на плоскости Oxy в виде $\mathbf{v}^{\perp} = v^{\perp} \mathbf{e}^{\perp}$, где $\mathbf{e}^{\perp}$ — единичный вектор. Направление этого вектора описывается углом φ между $\mathbf{e}^{\perp}$ и осью Oz . Изменение этого угла на 2π соответствует одному обороту. Запишите уравнение на динамику угла φ и исследуйте его решение на малых и больших временах.

§3.4. Движение нерелятивистской частицы в слабо неоднородном магнитном поле

Пусть нерелятивистская частица, имеющая заряд e и массу m , движется в заданном слабо неоднородном магнитном поле $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. Найдём траекторию частицы. Под характеристикой “слабо неоднородное” подразумевается, что радиус ларморовского кружка ξ (3.23b) мал по сравнению с характерным масштабом R , на котором изменяется магнитное поле, $\xi \ll R$. Такая задача возникает, например, при рассмотрении движения заряженных частиц, прилетающих от Солнца, в магнитном поле Земли. Литература: [Кузнецов & Смилга, 2001].

Обозначим проекцию скорости $\mathbf{v}$ частицы на магнитную силовую линию через $v_{\parallel}$, а проекцию скорости частицы на плоскость, нормальную к силовой линии – $v_{\perp}$:

$$v_{\parallel} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}), \quad \mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - v_{\parallel} \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}}{B}.$$

Мы будем называть магнитное поле слабонеоднородным для частицы, если ларморовский радиус ξ её вращения в магнитном поле много меньше чем характерный пространственный масштаб, на котором изменяется магнитное поле:

$$\xi = \frac{v_{\perp}}{\omega_B} \ll R \sim \frac{B}{|\text{grad } B|}, \quad \omega_B = \frac{eB}{mc}.$$

Разделение на медленное и быстрое движения

Обозначим через $\mathbf{r}(t)$ траекторию частицы. В общем случае траектория частицы в слабо неоднородном магнитном поле представляет из себя изогнутую спираль. Выделим медленное движение частицы $\mathbf{R}(t)$, траектория которого соответствует оси этой спирали:

$$\mathbf{R}(t) = \langle \mathbf{r}(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{-T}^0 dt' \mathbf{r}(t+t'),$$

Усреднение $\langle \dots \rangle_T$ производится по времени T , большому по сравнению с периодом обращения частицы $2\pi/\omega_B$ вокруг линий магнитного поля, но малому по сравнению со временем, за которое частица переходит в область с существенно другим магнитным полем, то есть на расстояние порядка R .

Быстрое движение, представляющее из себя вращение вокруг силовой линии магнитного поля, описывает неусреднённая часть $\xi(t)$ радиус-вектора $\mathbf{r}(t)$:

$$\xi(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{R}(t).$$

Скорость движения ведущего центра мы будем обозначать $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$. Магнитное поле в актуальной точке положения частицы отличается от магнитного поля в точке положения ведущего центра, поскольку магнитное поле

слабо неоднородно. Относительная величина этого отличия имеет первый порядок по ξ/R ,

$$\delta \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}) - \mathbf{B}(\mathbf{R}) \approx (\xi \cdot \nabla) \mathbf{B}(\mathbf{R})$$

Далее мы подразумеваем, что магнитное поле берётся в точке $\mathbf{R}$, так что $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{R})$.

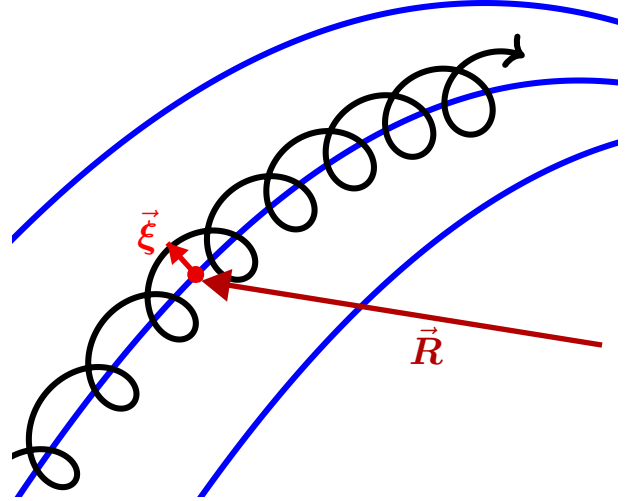


Рис. 3.2 Траектория частицы в слабо неоднородном магнитном поле.

Уравнение движения частицы

$$\ddot{\mathbf{R}} + \ddot{\xi} = \frac{e}{mc} [(\dot{\mathbf{R}} + \dot{\xi}) \times (\mathbf{B} + \delta \mathbf{B})], \quad (3.24)$$

усреднённое по периоду быстрого вращения, приводит к уравнению

$$\ddot{\mathbf{R}} = \frac{e}{mc} [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] + \frac{e}{mc} \langle [\xi \times \delta \mathbf{B}] \rangle.$$

Второе слагаемое в правой части есть сила действия магнитного поля на магнитный диполь μ , создающийся быстрым вращением заряженной частицы, см. (5.10). Поэтому окончательное уравнение на ведущий центр принимает вид

$$m \ddot{\mathbf{R}} = \frac{e}{c} [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] + (\mu \cdot \nabla) \mathbf{B}. \quad (3.25)$$

Быстрое движение Если это уравнение вычестить из исходного (3.24), и удержать только первый порядок по ξ , то мы получим уравнение на быстрое вращение частицы вокруг магнитной силовой линии,

$$\ddot{\xi} = \frac{e}{mc} [\dot{\xi} \times \mathbf{B}]. \quad (3.26)$$

Уравнение (3.26) описывает быстрое вращение частицы вокруг магнитной линии, поэтому $\xi \perp \mathbf{B}$. В главном приближении по малому параметру ξ/R скорость

вращения определяется поперечной компонентой скорости движения частицы. Таким образом,

$$v_{\perp} = -\omega_B \xi, \quad \boldsymbol{\mu} = \frac{ev_{\perp}\xi}{2c} \mathbf{b} = -\frac{mv_{\perp}^2}{2B} \mathbf{b}. \quad (3.27)$$

Мы ввели цилиндрическую систему координат, ось z которой сонаправлена магнитному полю; в этой системе координат $v_{\perp}$ – азимутальная компонента скорости, которая может принимать в т.ч. и отрицательные значения.

Движение ведущего центра. Нулевое приближение. В нулевом приближении в правой части уравнения (3.25) на движение ведущего центра надо удерживать только первое слагаемое (поскольку второе относительно мало как $(\xi/R)^2$), получив

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V}_{\parallel}, \quad \dot{\mathbf{V}}_{\parallel} = \frac{e}{mc} [\mathbf{V}_{\parallel} \times \mathbf{B}]. \quad (3.28)$$

Если мы допустим, что в $\mathbf{V}_{\parallel}$ есть компонента, направления поперёк магнитного поля, то в $\dot{\mathbf{V}}_{\parallel}$ мы получим вклад, по амплитуде сравнимый с $\ddot{\xi}$. Однако суть разделения на быстрые и медленные переменные состоит в том, что ускорение ведущего центра $|\dot{\mathbf{V}}|$ должно быть много меньше ускорения самой частицы $|\dot{\mathbf{v}}|$. Для того, чтобы ускорение ведущего центра было мало, его скорость движения должна быть направлена в нулевом приближении вдоль силовой линии магнитного поля,

$$\dot{\mathbf{V}}_{\parallel} \approx 0, \quad \mathbf{V}_{\parallel} = v_{\parallel} \mathbf{b}. \quad (3.29)$$

Из (3.28) следует, что при этом ускорение ведущего центра формально равно нулю. На самом деле оно не ноль, но его невозможно учесть в уравнении движения, записанном в нулевом приближении, поскольку его точность не позволяет этого сделать. Действительно, ускорение, которое испытывает ведущий центр, равно:

$$\dot{\mathbf{V}}_{\parallel} = \frac{d}{dt}(v_{\parallel} \mathbf{b}) = v_{\parallel}^2 (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \frac{dv_{\parallel}}{dt} \mathbf{b}. \quad (3.30)$$

Мы учли как то, что по мере смещения ведущего центра изменяется направление магнитного поля $\mathbf{b}$, так и то, проекция скорости $v_{\parallel}$ может меняться со временем. Как и должно быть, ускорение ведущего центра мало по сравнению с ускорением самой частицы

$$|\dot{\mathbf{V}}_{\parallel}| \sim \frac{v^2}{R} \sim \frac{\xi}{R} |\ddot{\xi}|,$$

поскольку, в том числе, d/dt оценивается как v/R , то есть как обратное время смещения частицы на расстояние порядка R .

Движение ведущего центра. Первое приближение Для того, чтобы получить уравнение движения ведущего центра в первом порядке по неоднородности

магнитного поля, представим действительные скорость и ускорение ведущего центра в виде

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V}_{\parallel} + \mathbf{V}_d \quad \Rightarrow \quad \ddot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{V}}_{\parallel} + \dot{\mathbf{V}}_d.$$

По смыслу, $\mathbf{V}_d$ должна быть направлена поперёк магнитного поля, поскольку продольная компонента скорости уже включена в $\mathbf{V}_{\parallel}$. Вклад в ускорение $\dot{\mathbf{V}}_{\parallel}$ (3.30), вычисленный в нулевом приближении, в первом приближении ещё пока не является скомпенсированным в уравнении движения ведущего центра. Поэтому в первом приближении уравнение на движение ведущего центра имеет вид

$$m\dot{\mathbf{V}}_{\parallel} = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \frac{e}{c} [\mathbf{V}_d \times \mathbf{B}]. \quad (3.31)$$

По той же логике, по которой на предыдущем шаге мы положили $\dot{\mathbf{V}}_{\parallel} \approx 0$, на этом шаге мы положили $\dot{\mathbf{V}}_d \approx 0$.

Движение ведущего центра вдоль линии магнитного поля. Адиабатический инвариант Спроектируем уравнение движения ведущего центра (3.31) на направление магнитного поля. В результате получим:

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = (\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{b} \cdot \nabla) B = -\frac{mv_{\perp}^2}{2B} (\mathbf{b} \cdot \nabla) B. \quad (3.32)$$

где мы воспользовались (3.27).

Покажем, что уравнение движения (3.32) предполагает сохранение некоторой величины, называемой адиабатическим инвариантом. Это уравнение можно переписать в видах

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\frac{v_{\perp}^2}{2B} \frac{1}{v_{\parallel}} \frac{dB}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d(v_{\perp}^2)}{v_{\perp}^2} = \frac{dB}{B},$$

второй из которых можно получить, воспользовавшись законом сохранения кинетической энергии

$$v^2 = v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2 = \text{const},$$

В интегральном виде это означает, что адиабатическим инвариантом является абсолютная величина магнитного момента (3.27), создаваемого быстрым движением частицы:

$$\frac{v_{\perp}^2}{B} = \text{const}, \quad \text{или} \quad |\boldsymbol{\mu}| = \text{const}. \quad (3.33)$$

Движение ведущего центра поперёк линии магнитного поля. Скорость дрейфа. Спроектируем уравнение движения ведущего центра (3.31) на плоскость, нормальную к силовой линии, путём векторного умножения на единичный вектор $\mathbf{b}$. В результате найдём скорость

$$\mathbf{V}_d = \frac{1}{\omega_B} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right) [\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b}] \quad (3.34)$$

являющуюся проекцией скорости ведущего центра на плоскость, нормальную к магнитному полю; эту скорость называют *скоростью дрейфа*. Скорость дрейфа $\mathbf{V}_d$ направлена нормально как направлению кривизны линии, так и самому магнитному полю. Для частиц противоположного заряда эта скорость направлена в противоположном направлении.

3-4.1 Задачи

• **Задача 1:** Нерелятивистская частица с массой m и зарядом e движется в однородном магнитном поле. Магнитное поле медленно меняется со временем — так, что изменение поля за период движения частицы мало по сравнению с самим значением поля. Доказать, что величина $v_\perp^2/B$ остаётся постоянной (т.е. является адиабатическим инвариантом), где $v_\perp$ есть проекция скорости частицы на плоскость, нормальную к полю. Показать, что адиабатический инвариант пропорционален величине магнитного диполя, создаваемого движением частицы по окружности; связать вектор магнитного диполя с магнитным полем. Вычислить изменение радиуса орбиты и энергии частицы, если поле изменилось от значения B_1 до B_2 . Указание: можно применить либо общую теорию адиабатических инвариантов, либо

- Определить изменение энергии частицы за один оборот — это работа, совершаемая вихревым электрическим полем.
- Составить конечно-разностное уравнение с шагом в один период, его интеграл является искомым адиабатическим инвариантом.

• **Задача 2:** Частица находится в магнитном поле прямого провода бесконечной длины. Сила тока по

проводу равна I , в начальный момент времени частица имеет скорость v , перпендикулярную проводу и направленную под углом $\pi/4$ к направлению от провода, и находится на расстоянии R от провода. Кроме того, вдоль провода приложено слабое однородное электрическое поле E . Описать дальнейшее движение частицы, если радиус ларморовской орбиты мал по сравнению с R (в частности, определить скорость дрейфа). Какие величины сохраняются в процессе движения частицы? Излучением пренебречь.

• **Задача 3:** Две соосные одинаковые катушки находятся на расстоянии L друг от друга, направление магнитного потока в них сонаправленное. По катушкам течёт ток I , погонная плотность намотки равна ρ . Радиус катушек R мал по сравнению с L , а их длина велика по сравнению с L . Кроме того, вдоль оси катушек приложено слабое однородное электрическое поле E . Частица начинает двигаться от положения по середине между катушками на их оси, причём скорость частицы составляет угол $\pi/2(1 - \epsilon)$ с осью, где $\epsilon \ll 1$. Радиус ларморовской орбиты мал по сравнению с L . Описать дальнейшее движение частицы. Указание: магнитное поле в области посередине между катушками приблизьте квадратичной зависимостью в направлении оси катушек.

3-4.2 Движение в неоднородных полях

• **Задача 4:** Постоянный ток I течёт по прямому бесконечно длинному цилиндрическому проводу радиуса a . С поверхности провода срывается электрон, его начальная скорость v_0 направлена вдоль провода. Найти наибольшее расстояние R , на которое электрон удалится от оси провода.

§3.5. Движение частиц со спином

Элементарные частицы обладают внутренним моментом количества движения, называемом спином. В системе покоя частицы K' спин частицы $\mathbf{S} = \hbar \mathbf{s}$, где $\hbar$ — постоянная Планка. Из принципов квантовой механики следует, что безразмерный вектор спина $\mathbf{s}$ может принимать только полуцелые значения. Кроме того, с такой частицей связан также магнитный момент $\boldsymbol{\mu}$, который сонаправлен спину частицы,

$$\boldsymbol{\mu} = g\mu_0\mathbf{s}, \quad \mu_0 = \frac{e\hbar}{2mc}, \quad (3.35a)$$

где m — масса частицы, e — её заряд, μ_0 — квантовая единица магнитного диполя для данного типа частиц. Безразмерная константа g называется *g-фактором*. Его значение зависит от типа частиц; отметим, что в рамках некантовой релятивистской механики g -фактор равен единице.

Спин частицы принято характеризовать псевдо-4-вектором a^μ , пропорциональным вектору Паули-Любанского (2.10): в сопровождающей системе отсчёта

$$K': \quad \|a^\mu\| = (0, \boldsymbol{\mu}), \quad (3.35b)$$

где u^μ — 4-скорость частицы. Напомним релятивистские равенства

$$a^\mu u_\mu = 0, \quad a^\mu a_\mu = -\boldsymbol{\mu}^2. \quad (3.35c)$$

3-5.1 Уравнение движения спина в однородном поле

Обзорная работа по теме: Тернов и Бордовицын, 1980.

Рассмотрим тело, центр масс которого покоится, и которое может вращаться в пространстве и имеет магнитный момент $\boldsymbol{\mu}$, жёстко связанный с его простран-

ственной ориентацией. Тогда уравнение движения тела может быть записано в виде

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}], \quad (3.36)$$

см. (5.11). Отметим, что 3-х мерный вектор механического момента не зависит от точки отсчёта системы координат, поскольку скорость центра масс равна нулю. Правая же часть этого уравнения по определению от выбора точки отсчёта не зависит.

Рассмотрим движение заряженной релятивистской частицы, обладающей спином, в однородном электромагнитном поле. В однородном поле вклад в силу (??), действующую на частицу, равен нулю, и поэтому её пространственное движение определяется исключительно силой Лоренца (3.10):

$$\frac{dp_\mu}{ds} = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u^\nu.$$

При описании движения спина мы стартуем не с лагранжиана, как это было для пространственного движения частиц и уравнений движения электромагнитного поля. Лагранжиан для частицы со спином нам не известен. Поэтому нам остаётся другой путь: обобщить уравнение движения спина (3.36) на релятивистский случай.

Будем работать в терминах вектора a^μ (3.35b). Из вида уравнения прецессии спина (3.36) в нерелятивистском предел следует, что производная a^μ вдоль мировой линии линейна по этому вектору и по электрическому полю, и может зависеть ещё только от вектора 4-скорости частицы. Поэтому общим видом уравнения на спин является

$$\frac{da^\mu}{ds} = \frac{\mu_0}{\hbar c} (C_1 F^{\mu\nu} a_\nu + C_2 u^\mu F^{\lambda\nu} u_\lambda a_\nu),$$

где $C_{1,2}$ – пока неизвестные безразмерные константы. Для определения первой константы перейдём в сопровождающую систему координат, где $\mathbf{v} = 0$ и потому вклад от C_2 в производную пространственных компонент a^i равен нулю. В силу (3.35a)

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = \frac{g\mu_0}{\hbar} [\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}] \quad \Rightarrow \quad C_1 = g.$$

Для определения константы C_2 продифференцируем первое равенство (3.35c) вдоль мировой линии, воспользовавшись уравнением движения спина и уравнением движения самой заряжённой бесспиновой частицы (3.10):

$$0 = \frac{d(a^\mu u_\mu)}{ds} = \frac{e}{2mc} (g - 2 + C_2) F^{\mu\nu} u_\mu a_\nu$$

В итоге получаем уравнение Баргмана-Мишеля-Телегди

$$\frac{da^\mu}{ds} = \frac{\mu_0}{\hbar c} (g F^{\mu\nu} a_\nu - (g - 2) u^\mu F^{\lambda\nu} u_\lambda a_\nu), \quad \frac{\mu_0}{\hbar c} = \frac{e}{2mc}. \quad (3.37)$$

Уравнение (3.37) непосредственно применимо для заряженных частиц, таких как электрон и протон. У нейтрона полный заряд равен нулю, но он обладает спином и ненулевым магнитным моментом. Уравнение движения его магнитного момента может быть получено из уравнения (3.37) предельным переходом $g\mu_0 = \mu_n = \text{const}$, $g \rightarrow \infty$:

$$\frac{da^\mu}{ds} = \frac{\mu_n}{\hbar c} (F^{\mu\nu} a_\nu - u^\mu F^{\lambda\nu} u_\lambda a_\nu). \quad (3.38)$$

3-5.1.1 Магнитные моменты некоторых частиц

Приведём численные значения магнитных моментов элементарных и некоторых других частиц. Эти значения не могут быть теоретически обоснованы в рамках некантовой релятивистской электродинамики, поэтому здесь их следует воспринимать как справочные.

	спин, s	μ_0	магнитный момент, $sg\mu_0$
электрон	1/2	$-\mu_B$	$\mu_e = -1.00116 \cdot \mu_B$
нейтрон	1/2	—	$\mu_n = -1.91304 \cdot \mu_N$
протон	1/2	μ_N	$\mu_p = 2.79284 \cdot \mu_N$
дейтон	1	$\mu_N/2$	$\mu_d = 0.85735 \cdot \mu_N$

Дейтон есть ядро атома дейтерия, т.е. эта частица состоит из одного протона и одного нейтрона. Знак в правой колонке означает, сонаправлены или противоположены спин и магнитный момент частицы, а в третьей колонке μ_0 определено в (3.37). Магнетон Бора μ_B и ядерный магнетон μ_N определяются равенствами

$$\mu_B = \frac{|e|\hbar}{2m_e c} = 9.274 \cdot 10^{-21} \text{ эрг/Гс},$$

$$\mu_N = \frac{|e|\hbar}{2m_p c} = 5.050 \cdot 10^{-24} \text{ эрг/Гс},$$

m_e – масса электрона, m_p – масса протона, а e – элементарный заряд.

3-5.1.2 Аномальный магнитный момент

Для заряженных частиц со спином $s = 1/2$ выделяют нормальный и аномальный магнитный момент. Нормальный магнитный момент соответствует значению $g = 2$, разность $g - 2$ даёт вклад в аномальный магнитный момент. Например, для электрона аномальный магнитный момент μ'_e равен

$$\mu'_e \equiv \frac{\mu_B}{2} (g - 2) \approx \frac{\alpha}{2\pi} \mu_B \approx 0.00116 \mu_B, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}, \quad (3.39)$$

где малая безразмерная константа $\alpha \approx 1/137$ называется постоянной тонкой структуры.

Протон, нейтрон и тем более дейтон являются составными частицами. В связи с этим их аномальный

магнитный момент имеет относительную величину порядка единицы.

Если у частицы нет аномального магнитного момента (или он по крайней мере мал, как у электрона), то динамика её спина приобретает дополнительные особенности, поскольку влияние второго слагаемого в правой части уравнения (3.37) на динамику спина становится малым. А именно, пусть частица движется в постоянном магнитном поле. Тогда, если $g = 2$, то угол между вектором скорости $\mathbf{v}$ в лабораторной системе координат и магнитным моментом $\boldsymbol{\mu}$ в сопровождающей системе координат K' остаётся постоянным по мере движения частицы.

Действительно, в случае $g = 2$ уравнения на 4-импульс p^μ (3.10) и на 4-вектор собственного момента a^μ (3.37) совпадают. Если есть только магнитное поле, то временная компонента этих 4-векторов не изменяется, а пространственные компоненты прецессируют вокруг направления магнитного поля с одной и той же угловой частотой,

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\mathbf{p}}{\tilde{a}} \right) = \frac{e}{mc} \left[\left(\frac{\mathbf{p}}{\tilde{a}} \right) \times \mathbf{B} \right], \quad (3.40)$$

причём $\gamma = \text{const}$ в процессе движения. Таким образом, амплитуды векторов $\mathbf{v}$ и $\tilde{\mathbf{a}}$ и угол между ними не изменяются во времени, а значит и $\boldsymbol{\mu}$ вращается вместе с этими векторами в силу связи (3.35b).

3-5.2 Задачи

• **Задача 1:** Однородно заряженный шар (сделанный из однородного же материала) радиуса a , массы M и полным зарядом Q вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, где абсолютное значение вектора $\boldsymbol{\omega}$ есть скорость вращения, а направление вектора $\boldsymbol{\omega}$ — направление оси, вокруг которой происходит вращение. Шар помещён в однородное магнитное поле $\mathbf{B}$. Найдите дальнейшее движение шара. *Указание:*

- Найдите коэффициент пропорциональности между угловой скоростью вращения $\boldsymbol{\omega}$ и магнитным моментом шара $\boldsymbol{\mu}$
- Найдите коэффициент пропорциональности между угловой скоростью вращения $\boldsymbol{\omega}$ и механическим моментом шара $\mathbf{L}$
- Напишите уравнение на эволюцию механического момента шара, найдите его решение.

• **Задача 2:** Однородно заряженный шарик радиуса a пролетает параллельно обкладкам плоского конденсатора через его центр. На влёте в конденсатор шарик вращается вокруг оси, нормальной к обкладкам конденсатора, с угловой скоростью ω (так что $a\omega \ll c$). Шарик преодолевает путь $2R$ между обкладок, после чего

покидает конденсатор. Электрическое поле внутри конденсатора равно E . Скорость шарика v сравнима со скоростью света, его масса — m , полный заряд — q . Найдите изменение ориентации оси вращения шарика после пролёта через конденсатор (в системе движущейся вместе с шариком).

Решение: Перейдём в систему координат, связанную сдвигающимся шариком. Найдём сначала связь между моментом импульса $\mathbf{L}$ и магнитным моментом $\boldsymbol{\mu}$ шарика. Согласно (2.9a) и (5.7b)

$$\mathbf{L} = \int d^3r [\mathbf{r} \times \tilde{\mathbf{p}}] = \rho_m \int d^3r [\mathbf{r} \times \mathbf{v}],$$

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c} \int d^3r [\mathbf{r} \times \mathbf{j}] = \frac{\rho}{2c} \int d^3r [\mathbf{r} \times \mathbf{v}] = \frac{\rho}{2c\rho_m} \mathbf{L}$$

где $\mathbf{v}$ — локальная скорость элемента шарика. Таким образом, уравнение на движение механического момента шарика есть

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt'} = [\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}'] = \frac{\rho}{2c\rho_m} [\mathbf{L} \times \mathbf{B}']$$

где штрихи подчёркивают ещё раз, что соответствующие величины берутся в сопровождающей шарик системе координат.

Магнитное поле в движущейся системе координат вычисляется по формулам преобразования электромагнитного поля (3.18b):

$$\mathbf{B}' = -\frac{\gamma}{c} [\mathbf{V} \times \mathbf{E}],$$

где $\mathbf{E}$ — электрическое поле внутри конденсатора. Таким образом, магнитное поле $\mathbf{B}'$ направлено параллельно обкладкам конденсатора и нормально к направлению движения шарика. Поэтому угловая скорость поворота оси вращения шарика

$$\Omega = \frac{\rho B'}{2c\rho_m}.$$

Время действия t' этого магнитного поля равно

$$t' = \frac{2R}{\gamma V}$$

где γ -фактор появился вследствие лоренцевского сокращения длины, см. (1.4f).

В результате получаем, что в собственной системе координат ось вращения шарика повернулась на угол

$$\vartheta = \frac{\rho}{2c\rho_m} B' t' = \frac{\rho R E}{c^2 \rho_m} = \frac{q E R}{m c^2}, \quad (3.41)$$

где q — полный заряд шарика, а m — его масса.

• **Задача 3:** По бесконечно длинному проводу течёт ток I . Найдите i) угол, на который отклонится траектория нейтрона, пролетающего мимо провода на прицельном расстоянии ρ . Исходно нейтрон двигался в плоскости, ортогональной проводу; его магнитный момент лежал в той же плоскости и был ортогонален направлению движения. Считайте, что искомым углом отклонения траектории мал, как мал и

угол отклонения магнитного момента в результате пролёта мимо провода. Магнитный момент нейтрона равен $\mu_n = -0.96 e\hbar/m_p c = -9.6 \cdot 10^{-24}$ эрг/Гс, где $m_p = 1.67 \cdot 10^{-24}$ г — масса нейтрона, элементарный заряд $e = 4.8 \cdot 10^{-10}$ Фр, знак минус означает, что магнитный момент антинаправлен механическому моменту, величина последнего $\hbar/2$. Найдите также ii) условие того, что найденный угол мал, iii) условие того, что угол отклонения магнитного момента также мал. Напишите численные ограничения на скорость нейтрона v полагая, что по проводу течёт ток $I = 1 \text{ A} = 3 \cdot 10^9 \text{ statA}$, а прицельное расстояние $\rho = 1 \text{ см}$.

• **Задача 4:** По бесконечно длинному проводу течёт ток I . Найдите i) угол, на который отклонится траектория нейтрона, пролетающего мимо провода на прицельном расстоянии ρ . Исходно нейтрон двигался в плоскости, ортогональной проводу; его магнитный момент лежал в той же плоскости и был ортогонален направлению движения. Считайте, что искомый угол от-

клонения траектории мал. Известно, что угловая скорость прецессии магнитного момента нейтрона на расстояниях $\sim \rho$ велика по сравнению с обратным временем пролёта нейтрона на этих расстояниях. В таком случае эффекты квантования приводят к тому, что магнитный момент нейтрона адиабатически отслеживает направление поля, оставаясь направленным на всей траектории либо по полю, либо против поля. Магнитный момент нейтрона равен $\mu_n = -0.96 e\hbar/m_p c = -9.6 \cdot 10^{-24}$ эрг/Гс, где $m_p = 1.67 \cdot 10^{-24}$ г — масса нейтрона, элементарный заряд $e = 4.8 \cdot 10^{-10}$ Фр, знак минус означает, что магнитный момент антинаправлен механическому моменту, величина последнего $\hbar/2$. Найдите также ii) условие того, что найденный угол мал, iii) условие того, что скорость прецессии магнитного поля достаточно велика, чтобы выполнялось условие адиабатичности изменения магнитного поля. Напишите численные ограничения на скорость нейтрона v полагая, что по проводу течёт ток $I = 1 \text{ A} = 3 \cdot 10^9 \text{ statA}$, а прицельное расстояние $\rho = 1 \text{ см}$.

Глава 4

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

1	Уравнения движения электромагнитного поля	55
1.	Действие свободного электромагнитного поля	55
2.	Вторая пара уравнений Максвелла	55
3.	Поле, создающиеся токами: запаздывающие потенциалы	56
2	Тензор энергии-импульса	57
1.	Нётеровский метод построения тензора энергии-импульса	57
2.	Тензор энергии-импульса электромагнитного поля	58
3.	Матричная структура тензора энергии-импульса электромагнитного поля	59
3	Электромагнитные волны	59
1.	Плоская электромагнитная волна	59
2.	Плоская монохроматическая электромагнитная волна	60
3.	Эффект Доплера и абберация света	62
4.	Задачи	62
4	Геометрическая оптика	64
1.	Монохроматическая волна	64
5	Симметрии в классической электродинамике	65

§4.1. Уравнения движения электромагнитного поля

Для точечной частицы каноническими переменными (степенями свободы) при лагранжевом описании являются три пространственных координаты тела.

Поле описывается другим способом. К каждой точке пространства прикреплено некоторое фиксированное число степеней свободы, которые и являются в этом случае каноническими переменными в лагранжевом описании. Координаты же в этом случае служат для перечисления канонических переменных. В случае электромагнитного поля обобщёнными координатами являются компоненты 4-потенциала A^μ .

4-1.1 Действие свободного электромагнитного поля

Действие для свободного электромагнитного поля должно быть квадратично по производным 4-потенциала, обладать калибровочной инвариантностью (не изменяться при замене вида (3.17a)) и быть инвариантным по отношению к любому преобразованию Лоренца, в том числе и к операции инверсии. Из Пункта 3-2.4 следует, что такой инвариант существует и единственен; таким образом, действие

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c} \int d\Omega F^{\nu\mu} F_{\nu\mu} = \frac{1}{c} \int d\Omega \mathcal{L}_f, \quad (4.1)$$

$$\mathcal{L}_f = -\frac{1}{16\pi} F^{\nu\mu} F_{\nu\mu}.$$

Коэффициент $1/c$ выбран из соотношения размерности, а численный коэффициент $1/(16\pi)$ добавлен для того, чтобы в итоге получились уравнения Максвелла с общепринятыми коэффициентами. Величину $\mathcal{L}_f$ можно

назвать объёмной плотностью лагранжиана. Используя (3.21) получаем, что лагранжиан свободного поля есть

$$L_f = \int d^3\mathbf{r} \mathcal{L}_f = \frac{1}{8\pi} \int d^3\mathbf{r} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2). \quad (4.2)$$

В этом параграфе мы изучаем движение поля при заданном движении электрических зарядов. Действие, которое описывает движения поля, складывается из двух частей – действия свободного электромагнитного поля (4.1) и части действия (3.2), отвечающего за взаимодействие поля и частиц:

$$S = S_f + S_{\text{int}} \quad (4.3)$$

Проведём вариацию действия S , положив $A_\mu \rightarrow A_\mu + \delta A_\mu$ и предполагая вариацию поля δA_μ убывающей на бесконечности:

$$\begin{aligned} \delta S &= -\frac{1}{4\pi c} \int d\Omega F^{\nu\mu} \partial_\nu \delta A_\mu - \frac{1}{c^2} \int d\Omega j^\mu \delta A_\mu = \\ &= \frac{1}{4\pi c} \int d\Omega \left(\partial_\nu F^{\nu\mu} - \frac{4\pi}{c} j^\mu \right) \delta A_\mu. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Преобразуя первое слагаемое, мы сначала воспользовались тем, что выражения для действия представляется из себя квадратичную форму, потом антисимметричностью тензора электромагнитного поля (3.11), а затем произвели интегрирование по частям. В результате получаем, что уравнения движения поля являются

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu. \quad (4.5)$$

4-1.2 Вторая пара уравнений Максвелла

Перепишем уравнения (4.5) в трёх-мерной форме. Для этого, как и при получении первой пары уравнений Максвелла, распишем определение тензора электромагнитного поля (3.10) для различных его компонент, см. (3.12):

$$\begin{aligned}\partial_i F^{i0} &= \partial_i E^i = \frac{4\pi}{c} j^0, \quad (\mu = 0, \nu = i), \\ \partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} &= -\partial_0 E^i - \epsilon_{jik} \partial_j B^k = \frac{4\pi}{c} j^i, \\ &(\mu = i, \nu = 0, j).\end{aligned}$$

Остаётся перевести 4-ток в трёхмерные обозначения согласно (1.9a). В результате в векторных обозначениях эти равенства переписываются в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (4.6)$$

Уравнения (4.6) составляют *вторую пару уравнений Максвелла*. Напомним, что первая пара уравнений Максвелла выписана в (3.20).

4-1.3 Поле, создающиеся токами: запаздывающие потенциалы

Если движение зарядов полностью определено, то есть известен 4-ток $j^\mu(x)$, то вторая пара уравнений Максвелла (4.5) (или (4.6)) позволяет найти распределение поля. В этом пункте мы рассмотрим один из математически наиболее компактных способов нахождения поля по заданному движению зарядов.

Перепишем уравнение (4.5) в терминах 4-потенциала:

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\mu.$$

Результат решения поставленной нами задачи с точки зрения физических величин (то есть полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$) не зависит от того, какая именно калибровка будет выбрана. С другой стороны, выписанное уравнение приобретает более простой вид, если калибровка лоренцева, см. (3.17b): в таком случае второе слагаемое в левой части уравнения исчезает, и мы приходим к уравнению

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu, \quad \square \equiv \partial_\nu \partial^\nu = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta, \quad (4.7)$$

где Δ – оператор Лапласа в трёх-мерном координатном пространстве. Оператор $\square$ принято называть *оператором д'Аламбера*.

Таким образом, в результате использования калибровки Лоренца вторая пара уравнений Максвелла, записанная в терминах 4-потенциала, распадается на 4 независимых уравнения для каждой компоненты 4-потенциала. При каждом фиксированном μ уравнение

(4.7) является *неоднородным волновым уравнением* (если соответствующая компонента тока равна нулю, то такое уравнение называется просто *волновым уравнением*).

4-1.3.1 Функция Грина

Решение неоднородного волнового уравнения удобно записывать через функцию Грина волнового уравнения,

$$G(t, \mathbf{r}) = \frac{\delta(t - r/c)}{r}, \quad (4.8)$$

которая удовлетворяет уравнению

$$\square G(t, \mathbf{r}) = 4\pi \delta(t) \delta^{(3)}(\mathbf{r}) = 4\pi c \delta^{(4)}(x),$$

где $\|x^\mu\| = \{ct, \mathbf{r}\}$. Свойства функции Грина подробно обсуждаются в Пункте 6-2.1. Функция Грина связывает вклад в сигнал в точке $\mathbf{r}$ в момент времени $t > 0$ от заряда, который находился в начале координат в нулевой момент времени. Отметим, что функций Грина, вообще говоря, существует бесконечно много. Мы выбрали вполне определённую – *запаздывающую функцию Грина*, руководствуясь принципом причинности: реакция поля на источник должна наступать не ранее появления этого источника.

Выражение (4.8) можно интерпретировать следующим образом: если в начале координат в нулевой момент времени находился покоящийся источник единичной амплитуды, то в результате от этого источника начнёт распространяться сигнал со световой скоростью в форме сферической волны, так что на расстоянии r от него он будет зафиксирован в момент времени $t = r/c$.

Функцию Грина можно записать также и в ковариантном виде:

$$G(x) = 2c \theta(x^0) \delta(x_\mu x^\mu), \quad (4.9)$$

где $\|x^\mu\| = \{ct, \mathbf{r}\}$, а θ -функция равна единице при положительном аргументе и нулю при отрицательном его значении. Принцип причинности гарантируется как раз присутствием этой функции в качестве множителя.

4-1.3.2 Запаздывающие потенциалы

Используем результат Пункта 4-1.3.1: 4-потенциал в калибровке Лоренца равен

$$\begin{aligned}A^\mu(t, \mathbf{r}) &= \frac{1}{c^2} \int d\Omega_z G(x - z) j^\mu(z) = \\ &= \frac{1}{c} \int d^3z dt_r G(t - t_r, \mathbf{r} - \mathbf{z}) j^\mu(t_r, \mathbf{z}) = \\ &= \frac{1}{c} \int d^3z \frac{j^\mu(t - |\mathbf{r} - \mathbf{z}|/c, \mathbf{z})}{|\mathbf{r} - \mathbf{z}|},\end{aligned} \quad (4.10)$$

где 4-вектора $\|x^\mu\| = \{ct, \mathbf{r}\}$, $\|z^\mu\| = \{ct_r, \mathbf{z}\}$, а элемент 4-объёма $d\Omega_z = c dt_r d^3z$. Первое и второе выражения для 4-потенциала A^μ представляет из себя общее выражение, следующее из уравнения на 4-потенциал (4.7) и определения функции Грина G , см. Пункт 6-2.1.

Последнее выражение для 4-потенциала A^μ получено при использовании конкретного вида функции Грина (4.8). Решение волнового уравнения, записанное в этом виде, называется *запаздывающими потенциалами*. Смысл этого выражения следующий: сигнал в точку $\mathbf{r}$ из точки $\mathbf{z}$ приходит за время $|\mathbf{r} - \mathbf{z}|/c$, необходимое пройти сигналу со световой скоростью. Таким образом, чтобы понять, каково воздействие происходящего в точке $\mathbf{z}$ на точку $\mathbf{r}$ в момент времени t , надо узнать, что было в точке $\mathbf{z}$, но в более ранний момент времени

$t_r = t - |\mathbf{r} - \mathbf{z}|/c$. Сила воздействия падает обратно пропорционально расстоянию между точками, как $1/|\mathbf{r} - \mathbf{z}|$, что соответствует частному случаю – закону Кулона.

В Пункте 5-1.1 продемонстрировано, как из общего выражения для запаздывающих потенциалов (4.10) выводится закон Кулона для распределения электрического поля статических зарядов. В Пункте 5-2.1 получен закон Био-Савара-Лапласа для распределения магнитного поля, индуцированного постоянными токами.

§4.2. Тензор энергии-импульса

В §3 было показано, что законы сохранения энергии и импульса полной системы можно записать в виде локальных законов сохранения. Каждый локальный закон сохранения представляет из себя равенство нулю 4-дивергенции некоторого 4-столбца, нулевая компонента которого является объёмной плотностью сохраняющейся величины, а пространственные – плотностью потока этой величины. В случае энергии и импульса соответствующие столбцы образуют тензор второго ранга – тензор энергии-импульса $T^{\mu\nu}$.

В этом параграфе мы обобщим результаты, полученные в §3, на случай взаимодействующей системы заряженных массивных частиц и электромагнитного поля.

4-2.1 Нётеровский метод построения тензора энергии-импульса

Покажем, как в общем случае какой-либо полевой теории строить сохраняющиеся величины, вытекающие из симметрии теории.

Пусть у поля есть некоторое число степеней свободы N , которые являются каноническими переменными в лагранжевом описании. Мы предполагаем, что нулевой координатой (первой по счёту) является временная координата, а пространство-время является d -мерным пространством. Действие

$$S = \int d^d x \mathcal{L}(\phi_a, \phi_{a,\mu}), \quad (4.11a)$$

где $\mathcal{L}$ – d -мерная плотность лагранжиана, а индекс $a = 1, \dots, N$. Поиск экстремум действия приводит к уравнениям движения Лагранжа

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} = 0. \quad (4.11b)$$

Предполагается, что набор координат есть $\{x^0, x^1, \dots, x^{d-1}\}$, где координата x^0 играет роль времени.

Покажем, что из того факта, что лагранжиан $\mathcal{L}$ в (4.11a) не зависит явно от координат (а только через

поля ϕ_a) следует сохранение 4х величин, которые в специальной теории относительности следует назвать 4-импульсом. Мы будем действовать в рамках обобщения схемы Пункта 7-3.1.1 для системы с одной степенью свободы.

Произведём в выражении для действия (4.11a) слабо-нелинейную замену координат: пусть новая система координат x'^μ связана со старой x^μ преобразованием

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x). \quad (4.12)$$

При такой замене линеаризованные по ξ вариации интересных для нас величин равны:

$$\begin{aligned} \delta_\mu &= (\delta_\mu^\lambda + \xi_{,\mu}^\lambda) \partial'_\lambda, \\ d^d x &= (1 - \xi_{,\lambda}^\lambda) d^d x', \\ \phi_a(x) &= \phi_a(x') - \xi^\lambda \phi_{a,\lambda}, \\ \phi_{a,\mu}(x) &= \phi_{a,\mu}(x') - \xi^\lambda \phi_{a,\mu\lambda}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Поскольку по вариации всегда будет производиться линеаризация, в последних, поправочных, слагаемых в (4.13) аргументом можно считать x а не x' . Эти поправочные слагаемые должны пониматься как вариации соответствующих величин. Действие (4.11a) не изменяется при любой замене координат, в том числе и при замене (4.12). Линеаризуем (нулевую) вариацию δS по ξ используя (4.13):

$$\delta S = - \int \left(\mathcal{L} \xi_{,\lambda}^\lambda + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{a,\lambda}} \phi_{a,\lambda} \xi^\lambda + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{a,\nu}} \xi^\lambda \frac{\partial \phi_{a,\lambda}}{\partial x^\nu} \right). \quad (4.14)$$

Проинтегрируем последнее слагаемое по частям относительно производной ∂_μ . Затем положим, что конфигурация полей соответствует истинной траектории системы, так что возможно воспользоваться уравнениями движения (4.11b). В результате придём к тому, что

$$\delta S = \int \left(-\mathcal{L} \delta_\lambda^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{a,\nu}} \phi_{a,\lambda} \right) \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\nu}.$$

Теперь ещё раз проинтегрируем это уравнение по ча-

стоям относительно ∂_ν ,

$$\begin{aligned}\delta S &= - \int d^d x \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{a,\mu}} \phi_{a,\nu} - \mathcal{L} \delta_\mu^\nu \right) \xi^\mu = \\ &= - \int d^d x \partial_\nu T_\mu^\nu \xi^\mu = \int d^d x T_\mu^\nu \partial_\nu \xi^\mu = 0,\end{aligned}\quad (4.15)$$

и приравняем коэффициент при ξ^λ нулю (поскольку $\delta S = 0$).

Итогом наших рассуждений являются уравнения

$$\partial_\nu T_\mu^\nu = 0, \quad (4.16a)$$

которые верны, если выполнены уравнения движения (4.11b). Величина

$$T_\mu^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{a,\nu}} \phi_{a,\mu} - \delta_\mu^\nu \mathcal{L} \quad (4.16b)$$

называется тензором энергии-импульса. Уравнения (4.16a) означают, что интегральные величины

$$P_\mu = \int d^d x^1 \dots d^d x^{d-1} T_\mu^0 \quad (4.16c)$$

сохраняются во времени.

Наши рассуждения останутся в силе, если вместо полей ϕ_a мы выберем какие-либо их нелинейные комбинации. Важно только, чтобы якобиан перехода от старых полей к новым был не равен нулю. Поэтому определение (4.16b) можно переписать через любые другие независимые комбинации полей. Пусть Φ_a , $a = 1, \dots, N$ — любые N независимых функций N величин ϕ_a . Тогда верно равенство

$$T_\mu^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{a,\nu}} \Phi_{a,\mu} - \delta_\mu^\nu \mathcal{L}. \quad (4.16d)$$

4-2.2 Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

Применим общую схему Пункта 4-2.1 к электромагнитному полю. Эта схема такова, что при проведении вариации следует считать, что любая векторная или тензорная каноническая переменная (например, 4-потенциал A_μ) является совокупностью 4-х скалярных величин. Таким образом, эта схема вариации игнорирует тензорную структуру полей. Следствием является, в частности, несимметричность получаемого тензора энергии-импульса.

Начнём с части действия (4.1), описывающей электромагнитное поле само по себе. Поскольку

$$\frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial A_{\lambda,\nu}} = - \frac{\partial (A_{\sigma,\tau} A^{\sigma,\tau} - A_{\sigma,\tau} A^{\tau,\sigma})}{8\pi c \partial A_{\lambda,\nu}} = - \frac{1}{4\pi c} F^{\nu\lambda},$$

то, согласно процедуре (4.16b), вклад от этой части лагранжиана равен

$$\begin{aligned}\text{field: } T_\mu^\nu &= \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial A_{\lambda,\nu}} A_{\lambda,\mu} - \delta_\mu^\nu \mathcal{L}_f = \\ &= - \frac{F^{\nu\lambda} A_{\lambda,\mu}}{4\pi c} + \frac{F^{\sigma\tau} F_{\sigma\tau}}{16\pi c} \delta_\mu^\nu.\end{aligned}\quad (4.17a)$$

Эта часть тензора энергии-импульса не симметрична. Для того, чтобы ниже полный тензор привести к симметричному виду, сделаем здесь следующие выкладки:

$$\begin{aligned}\text{field: } T_\mu^\nu &= - \frac{F^{\nu\lambda} F_{\mu\lambda}}{4\pi c} + \frac{F^{\sigma\tau} F_{\sigma\tau}}{16\pi c} \delta_\mu^\nu - \\ &\quad - \frac{1}{c^2} j^\nu A_\mu + \cancel{\frac{\partial_\lambda (F^{\lambda\nu} A_\mu)}{4\pi c}}.\end{aligned}\quad (4.17b)$$

Предпоследнее слагаемое получено с учётом второй пары уравнений Максвелла (4.5). Последнее слагаемое вычёркнуто, поскольку оно имеет вид преобразования (2.4b), которое мы и производим над T_μ^ν ради достижения его симметричности.

Рассмотрение вклада, зависящего от траекторий точечных заряженных частиц, надо произвести отдельно, поскольку формализм Пункта 4-2.1 был развит для полевой задачи. Согласно (4.12), вариация траектории частиц δx_a^μ должна быть равной $-\xi^\mu(x_a)$. В этом случае

$$\begin{aligned}\text{as: } dx^\mu(x) &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dx'^\nu(x') \\ dx^\mu(x) &= dx^\mu(x') - d\xi^\mu = \\ &= dx'^\mu - \partial_\nu \xi^\mu dx'^\nu - d\xi^\mu.\end{aligned}\quad (4.17c)$$

Таким образом, вариация δdx^μ есть последние два слагаемых в (4.17c). Отметим, что в рамках развиваемого метода варьирования оказывается необходимым учесть векторную структуру приращения координаты dx^μ при вычислении его вариации (в отличие от любого другого тензора, например, A_μ). Если учесть только последнее слагаемое $-d\xi^\mu$ в (4.17c), то при вариации действия мы получим (3.8), что есть ноль для истинных траекторий частиц. Поэтому остаётся

$$\begin{aligned}\delta S &= mc \int u^\nu u_\mu \partial_\nu \xi^\mu ds + \frac{e}{c} \int A_\mu dx^\nu \partial_\nu \xi^\mu = \\ &= - \frac{1}{c} \int d\Omega \partial_\nu \left(j_m^\nu u_\mu + \frac{1}{c} j^\nu A_\mu \right) \xi^\mu.\end{aligned}\quad (4.17d)$$

Согласно определению (4.15),

$$\text{particles: } T_\mu^\nu = \frac{1}{c} j_m^\nu u_\mu + \frac{1}{c^2} j^\nu A_\mu. \quad (4.17e)$$

В результате сложения (4.17b) и (4.17e) получаем, что вариация полного действия всей системы равна

$$\delta S = \frac{1}{c} \int d\Omega \xi_\mu \partial_\nu T^{\mu\nu}, \quad T^{\mu\nu} = T^{(m)\mu\nu} + T^{(f)\mu\nu}. \quad (4.18)$$

Тензор энергии-импульса массивных частиц $T^{(m)\mu\nu}$ был определён в §3, см. (2.3c, 2.5a), и есть первое слагаемое в

(4.17e). Согласно (4.17b), тензор энергии-импульса электромагнитного поля в пустоте равен

$$T^{(f)\mu\nu} = g^{\mu\nu} \frac{F^{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma}}{16\pi} - \frac{F^{\mu\lambda} F^{\nu}_{\lambda}}{4\pi}, \quad (4.19)$$

Это выражение симметрично по индексам μ, ν , поэтому и весь полученный тензор энергии-импульса симметричен,

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}. \quad (4.20)$$

Отметим, что, тогда как в действии присутствует член, ответственный за взаимодействие этих подсистем, $T^{\mu\nu}$ (4.18) формально остался бы таким же, как если бы эти две подсистемы стали невзаимодействующими. Это свойство является частным свойством классической релятивистской электродинамики, в квантовой теории оно исчезает. Также скажем, что мы получили канонический тензор энергии-импульса, т.е. фигурирующий в уравнении Эйнштейна на гравитационное поле.

4-2.3 Матричная структура тензора энергии-импульса электромагнитного поля

Напомним, что общую структуру тензора энергии-импульса мы обсуждали в Пункте 2-3.1, а сама она приведена в (2.3f). В §3 мы исследовали матричные элементы части тензора энергии-импульса $T^{(m)\mu\nu}$, связанного с массивными частицами, см. (2.5a). Поэтому сейчас нам остаётся исследовать часть $T^{(f)\mu\nu}$, связанную с электромагнитным полем.

Из (4.19) вытекает, что объёмная плотность электромагнитной энергии

$$T^{(f)00} = \mathcal{E} = \frac{E^2 + B^2}{8\pi} \quad (4.21a)$$

Плотность потока энергии $\mathbf{S}$ равна

$$T^{(f)i0} = S^i/c, \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]. \quad (4.21b)$$

Выражение для потока энергии (4.21b) называют *вектором Умова-Пойнтинга (Poynting-vector)*. Из симметрии тензора энергии-импульса следует (см. рассуждения Пункта 2-3.1), что этому же вектору равна объёмная плотность импульса, $\vec{p} = \mathbf{S}/c^2$, связанного с электромагнитным полем.

Тензор напряжений равен

$$\sigma^{ik} = \frac{1}{4\pi} \left(E^i E^k + B^i B^k - \frac{E^2 + B^2}{2} \delta^{ik} \right) \quad (4.21c)$$

Симметричный вид тензора энергии-импульса удобен тем, что он позволяет интерпретировать матричные элементы максвелловского тензора напряжений $\hat{\sigma}$ как силы, приложенные к сторонам бесконечно малого кубического элемента объёма пространства. Только в случае симметрии тензора энергии-импульса такой бесконечно малый объём не будет приобретать бесконечно большого углового ускорения. Математически это означает возможность определения тензора момента импульса через тензор энергии-импульса, что проделано в § 5.

След от электромагнитной части энергии-импульса оказывается равным нулю, см. (4.19),

$$T^{(f)\mu}_{\mu} = 0. \quad (4.21d)$$

Отметим, что это соответствует свойству тензора энергии-импульса безмассовых (или пределу ультра релятивистских) частиц (2.5da).

§4.3. Электромагнитные волны

Рассмотрим динамику электромагнитного поля в пустоте, то есть в области пространства, где нет зарядов. В этой области динамика поля в терминах 4-потенциала удовлетворяющего условию калибровки Лоренца описывается однородным волновым уравнением, см. (4.7). Этому же уравнению подчиняется и само электромагнитное поле, поскольку поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ линейно связаны с 4-потенциалом A^μ , см. (3.14). Волновое уравнение можно получить также и из уравнений Максвелла (3.20,4.6), запишем его для электрического поля:

$$\square \mathbf{E} = \left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta \right) \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{E} = 0. \quad (4.22)$$

В силу бездивергентности электрического поля в пустоте, у него есть только две независимые компоненты. Волновое уравнение справедливо и для магнитного поля $\mathbf{B}$ с тем же условием $\text{div } \mathbf{B} = 0$.

4-3.1 Плоская электромагнитная волна

Предположим, что все компоненты поля зависят только от одной координаты, пусть это будет координата Oz . Тогда волновое уравнение упростится до вида

$$\left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \partial_z^2 \right) \mathbf{E} = \left(\frac{1}{c} \partial_t - \partial_z \right) \left(\frac{1}{c} \partial_t + \partial_z \right) \mathbf{E} = 0, \quad \partial_z E^z = 0. \quad (4.23)$$

Для того, чтобы волновое уравнение удовлетворялось, электрическое поле должно зависеть либо только от комбинации $z - ct$, либо только от комбинации $z + ct$. Таким образом, поле $\mathbf{E}$ может быть представлено в виде суммы волн, бегущих со скоростью c в положительном и отрицательном направлении оси Oz ,

$$\mathbf{E}(t, z) = \mathbf{E}_+(z - ct) + \mathbf{E}_-(z + ct). \quad (4.24)$$

Например, рассмотрим вариант, когда есть только вклад $\mathbf{E}_+$ от бегущей в положительном направлении волны (будем опускать индекс ‘+’ для краткости). В силу линейности уравнений Максвелла, магнитное поле $\mathbf{B}$ волны зависит от времени и координат через эту же комбинацию $z - ct$. Бездивергентность обоих полей означает, что их z -компоненты равны нулю. Таким образом, электромагнитная волна является полностью поперечной. Из уравнений Максвелла следует, что в каждой точке электрическое и магнитное поля плоской волны связаны между собой соотношениями

$$\mathbf{B} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}], \quad \mathbf{E} = -[\mathbf{n} \times \mathbf{B}], \quad (4.25)$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор, указывающий направление распространения волны (при нашем выборе системы координат z -направление).

Вычислим тензор энергии-импульса, связанный с бегущей волной. Из (4.21a, 4.21b), а также (4.25) следует, что вектор Пойнтинга имеет ненулевой только z -компоненту, которая оказывается равной $c\varepsilon$, где ε – объёмная плотность энергии. Тензор напряжений (4.21c) имеет ранг равный единице, имея ненулевым только σ^{zz} -элемент. Собирая всё вместе, имеем

$$\varepsilon = \frac{\mathbf{E}^2}{4\pi}, \quad \mathbf{S} = c\varepsilon\mathbf{n}, \quad \sigma^{ik} = -\varepsilon n^i n^k. \quad (4.26)$$

Полный тензор энергии-импульса плоской монохроматической волны может быть записан также в виде

$$T^{\mu\nu} = \varepsilon n^\mu n^\nu, \quad \|n^\mu\| = \{1, \mathbf{n}\}. \quad (4.27)$$

Подчеркнём, что n^μ не является 4-вектором.

4-3.2 Плоская монохроматическая электромагнитная волна

Плоская волна называется монохроматической, если она зависит от координаты и времени по гармоническому закону

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = 2 \operatorname{Re} \tilde{\mathbf{E}}(t, \mathbf{r}), \quad (4.28)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp(-ik_\mu x^\mu),$$

где $\tilde{\mathbf{E}}$ – комплексное электрическое поле, $\mathbf{E}_0$ – комплексная амплитуда электрического поля волны, ω – циклическая (угловая) частота волны (*angular frequency*), $\mathbf{k}$ – волновой вектор (*wavenumber*), Re – операция взятия действительной части, а $\|x^\mu\| = \{ct, \mathbf{r}\}$. Поскольку уравнения Максвелла линейны, то их возможно записывать в терминах комплексных полей, а уже после вычислений переходить к физическим действительным полям. Мы также ввели четырёх-мерный волновой вектор

$$\|k^\mu\| = \left\{ \frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right\}, \quad \mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}, \quad k^\mu k_\mu = \omega^2 c^2 - \mathbf{k}^2 = 0. \quad (4.29)$$

Последние два равенства равносильны и следуют из волнового уравнения. Они означают, что электромагнитная волна распространяется со скоростью света. Для волн связь $\omega = \omega(\mathbf{k})$ в общем случае называют *законом дисперсии*, в нашем случае электромагнитных волн в пустоте закон дисперсии есть $\omega = c|\mathbf{k}|$.

Покажем, что k^μ действительно является 4-вектором. Преобразование Лоренца линейно и вещественно, поэтому преобразование Лоренца электромагнитного поля (3.18b) можно проводить с комплексным полем $\tilde{\mathbf{E}}$, введённым в (4.28), а уже потом выделять действительную часть. При таком подходе ясно, что *фазовый множитель* $\exp(-ik^\mu x_\mu)$ в электрическом поле является релятивистским инвариантом (величину $-k^\mu x_\mu$ называют *фазой волны*). Поскольку x^μ является 4-вектором, то и совокупность 4-х параметров k^μ также должна являться 4-вектором.

Период колебаний монохроматической волны в пространстве λ называется *длиной волны*, период колебаний по времени равен $1/\nu$:

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}|}, \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c}{\lambda}, \quad (4.30)$$

где ν есть *частота волны*. Видимый свет является электромагнитной волной с определённым диапазоном длин волн, от 390 нм (фиолетовый) до 770 нм (красный). Таким образом, свет распространяется с ранее введённой скоростью c , которую потому и называют скоростью света.

Для плоской монохроматической электромагнитной волны тензор энергии-импульса (4.27), усреднённый по периоду колебаний волны, равен

$$T^{\mu\nu} = \frac{|\mathbf{E}_0|^2}{2\pi k^2} k^\mu k^\nu. \quad (4.31)$$

В (4.31) коэффициент пропорциональности между тензорами $k^\mu k^\nu$ и $T^{\mu\nu}$ является 4-скаляром. Таким образом, отношение амплитуды волны к её частоте $|\mathbf{E}_0|/\omega$ является релятивистским инвариантом.

4-3.2.1 Число поляризаций плоской монохроматической волны

Если в плоской электромагнитной волне электрическое поле имеет всюду одно и то же направление, то такая волна называется *линейно поляризованной*.

Посмотрим, сколько существует линейно независимых плоских электромагнитных волн с фиксированным волновым вектором $\mathbf{k}$. Из связи электрического и магнитного полей волны следует, что оба поля ортогональны направлению распространения волны $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$. В результате остаётся только два линейно независимых направления для электрического поля $\mathbf{E}$. Таким образом, для электромагнитной волны существуют *две независимые поляризации*.

4-3.2.2 Круговые поляризации

Число поляризаций можно посчитать и рассуждая в терминах 4-потенциала A_μ , что может представлять некоторые преимущества. Если мы имеем дело с плоской волной, то вектор-потенциал имеет вид

$$A_\mu = 2 \operatorname{Re} (\alpha_\mu \exp(-ik_\nu x^\nu)), \quad \alpha_\mu k^\mu = 0.$$

Мы также записали условие того, что выбрана калибровка Лоренца (3.17b): существование этого условия приводит к тому, что 4 компоненты 4-потенциала задаются не более чем тремя независимыми параметрами. Однако калибровка всё ещё не фиксирована полностью: существуют калибровочные преобразования (3.17c) не изменяющее условие калибровки Лоренца. В нашем случае в качестве потенциала такого преобразования должна быть взята функция с той же пространственной зависимостью, что и у 4-потенциала: $f = \operatorname{Re}(-i\tilde{f} \exp(-ik_\nu x^\nu))$ с постоянным $\tilde{f}$. В терминах комплексного вектора α_μ это калибровочное преобразование выглядит как

$$\alpha_\mu \rightarrow \alpha_\mu + \tilde{f} k_\mu.$$

Калибровочным преобразованием мы можем добиться того, что нулевая компонента 4-потенциала обратится в нуль, $\alpha_0 = 0$; для этого надо выбрать $\tilde{f} = -\alpha_0/k$. Вместе с этим обратится в нуль и скалярное произведение векторных частей волнового вектора и комплексной амплитуды 4-потенциала, $(\alpha \cdot n) = 0$. Найденная калибровка называется *поперечной калибровкой*.

Пусть направлением распространения волны является Oz , так что $\|k^\mu\| = (k, 0, 0, k)$. Тогда ненулевыми остаются только 2 компоненты вектор-потенциала A_β , $\beta = \{x, y\}$, которые можно представить в виде суммы двух круговых поляризаций

$$\|\alpha_\beta\| = \alpha_+ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + \alpha_- \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

При повороте вокруг оси Oz на угол φ комплексные амплитуды двух возможных поляризаций $\alpha_\pm$ преобразуются по закону

$$\alpha_\pm \rightarrow \alpha_\pm \exp(\pm i\varphi). \quad (4.33)$$

Таким образом, электромагнитные волны имеют спиральность (проекция спина на направление распространения) ± 1 .

4-3.2.3 Эллиптическая поляризация

Опишем произвольную поляризацию электромагнитной плоской волны (4.28). Представим комплексную амплитуду волны в виде

$$\mathbf{E}_0 = e^{i\phi_0} (\mathbf{E}_1 + i\mathbf{E}_2), \quad (4.34)$$

где чисто действительные вектора $\mathbf{E}_{1,2}$ ортогональны друг другу, причём $|\mathbf{E}_1| \geq |\mathbf{E}_2|$. Фаза ϕ_0 равна

$$\phi_0 = \frac{\arg(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0)}{2}, \quad \text{if } (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0) \neq 0.$$

После этого по известному $\mathbf{E}$ легко найти $\mathbf{E}_{1,2}$ выделением действительной и мнимой частей у $e^{-i\phi_0} \mathbf{E}_0$. Если окажется, что $\mathbf{E}_2 = 0$, то мы имеем дело с линейной поляризацией. Если $(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0) = 0$, волна имеет одну из круговых поляризаций (4.32); при этом фазу ϕ_0 можно выбрать произвольной, при её изменении пара векторов $\mathbf{E}_{1,2}$ будет поворачиваться вокруг $\mathbf{n}$.

В общем же случае $|\mathbf{E}_1| > |\mathbf{E}_2| > 0$ говорят, что волна имеет *эллиптическую поляризацию*. Например, при фиксированном времени конец вектора электрического поля $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ будет описывать эллипс с полуосями $\mathbf{E}_{1,2}$, если сместиться вдоль направления распространения волны.

4-3.2.4 Разложение по монохроматическим волнам — соотношение Парсеваля

Рассмотрим ограниченную по времени плоскую волну $\mathbf{E}_+(t - z/c)$, поле которой убывает при $|t| \rightarrow \infty$ при фиксированном z . Про такую волну говорят как о *волновом пакете*. Покажем, что полная энергия (как и полный импульс), которая переносится волновым пакетом, можно представить как прямую сумму вкладов от монохроматических волн, составляющих этот волновой пакет.

Разложим волновой пакет по монохроматическим волнам. В общем случае преобразование Фурье по времени и координаты для электрического поля плоской волны имеет вид

$$\mathbf{E}(t, z) = \int (d\omega)(dk) e^{-i\omega t + ikz} \mathbf{E}_{\omega k}. \quad (4.35)$$

Однако в силу закона дисперсии (4.29)

$$\mathbf{E}_{\omega k} = 2\pi\delta(\omega - ck) \mathbf{E}_k, \quad (4.36)$$

что при подстановке в (4.35) возвращает нас, как и должно быть, к первому слагаемому в (4.24):

$$\mathbf{E}(t, z) = \int (dk) e^{i(z-ct)k} \mathbf{E}_k = \mathbf{E}_+(z - ct).$$

Теперь непосредственной подстановкой мы можем переписать полную энергию E , содержащаяся в волновом пакете, в терминах комплексной амплитуды $\mathbf{E}_k$:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4\pi} \int dz (\mathbf{E}_+(z))^2 = \int \frac{d\zeta}{4\pi} \mathbf{E}_+(\zeta) \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik\zeta} \mathbf{E}_k = \\ &= \int \frac{(dk) \mathbf{E}_k}{4\pi} \int d\zeta \mathbf{E}_+(\zeta) e^{ik\zeta} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int (dk) |\mathbf{E}_k|^2, \end{aligned} \quad (4.37)$$

где $\zeta = z - ct$, и мы воспользовались выражением для плотности энергии в электромагнитной волне (4.26). Последнее равенство в (4.37) есть сумма по монохроматическим волнам. В математике соотношение типа (4.37) между квадратичными нормами функции и её Фурье-образа называют *соотношением Парсеваля*. В (4.37) интегрирование происходит по всей числовой оси k , при этом $\mathbf{E}_{-k} = \mathbf{E}_k^*$ вследствие действительности физического поля $\mathbf{E}_+$.

Перепишем (4.37) в виде суммы энергий от волн с частотами ω . При этом частоты $+\omega$ и $-\omega$ соответствуют физически одной и той же волне, поскольку электрическое поле действительно, см. (4.28). Математически это соответствует тому, что $|\mathbf{E}_{-k}|^2 = |\mathbf{E}_k|^2$. Поэтому мы можем ограничиться интегрированием по $\omega > 0$, умножив подинтегральное выражение на 2. Поскольку $dk/d\omega = 1/c$, то из (4.37)

$$E = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} E_\omega, \quad E_\omega = \frac{|\mathbf{E}_k|^2}{2\pi c} = \frac{c}{2\pi} |\mathbf{E}_\omega|^2, \quad (4.38)$$

где Фурье-образ электрического поля по времени

$$\mathbf{E}_\omega = \int dt \mathbf{E}_+(z - ct) e^{i\omega t} = \frac{1}{c} \mathbf{E}_k.$$

4-3.3 Эффект Доплера и абберация света

Определим, как изменяются направление распространения и частота плоской монохроматической электромагнитной волны при смене системы координат.

Пусть в системе K волновой вектор имеет компоненты $\mathbf{k} = \{k \cos \theta, k \sin \theta, 0\}$, а в системе K' , движущейся относительно системы K со скоростью v вдоль оси Ox , компоненты волнового вектора равны $\mathbf{k}' = \{k' \cos \theta', k' \sin \theta', 0\}$. Связь между введёнными параметрами задаётся через лоренцевский буст, см. Пункт 4: в терминах 4-волнового вектора k^μ

$$\begin{pmatrix} k' \\ k' \cos \theta' \\ k' \sin \theta' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma k (1 - \beta \cos \theta) \\ \gamma k (\cos \theta - \beta) \\ k \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (4.39)$$

Отметим, что поскольку $k^\mu k_\mu = 0$, 4-импульс безмассовой частицы (см. Пункт 2-1.3) преобразуется по тем же законам (4.39), что и волновой 4-вектор k^μ .

4-3.3.1 Абберация света

Из (4.39) следует, что в новой системе отсчёта K' направление распространения плоской монохроматической волны отличается от того, которое было в системе K . Поделив первую компоненту на нулевую, а потом вторую на нулевую, получим, что

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta}, \quad \sin \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)}. \quad (4.40)$$

Обратный закон преобразования получается из (4.40) переменной местами штриха и заменой $v \rightarrow -v$.

Эффект изменения направления распространения электромагнитной волны при переходе в другую систему координат называется *абберацией* (*aberration of light*).

4-3.3.2 Эффект Доплера

Помимо направления, при переходе в другую систему координат изменяется также и частота волны. Нулевая компонента в уравнении (4.39) есть

$$\omega' = \gamma \omega (1 - \beta \cos \theta). \quad (4.41)$$

Эффект изменения частоты волны (в данном случае электромагнитной) при смене системы координат называется *эффектом Доплера* (*Doppler effect*).

4-3.4 Задачи

• **Задача 1:** В лабораторной системе отсчёта K дана бегущая линейно поляризованная волна $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$, $\mathbf{k} = \{0, 0, k\}$, $\mathbf{E}_0 \parallel Ox$. Система отсчёта K' движется со скоростью $\mathbf{V} = \{0, V, 0\}$. Найдите магнитное поле волны в системе K' .

Решение: Согласно (4.28), электромагнитное поле бегущей линейно поляризованной монохроматической волны представимо в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 \cos(\varphi), \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 \cos(\varphi), \end{aligned} \quad \varphi = -k_\mu x^\mu + \varphi_0.$$

Фаза φ является релятивистским инвариантом, а действительные вектора $\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0$ преобразуются по закону (3.18b). Таким образом, в новой системе координат

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E}'_0 \cos(\varphi), \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{B}'_0 \cos(\varphi), \end{aligned} \quad \varphi = -k'_\mu x'^\mu + \varphi_0.$$

Из условия задачи следует, что $\mathbf{B}_0 \parallel \mathbf{V}$. Поэтому

$$B_0'^y = B_0^y = E_0^x, \quad B_0'^z = \gamma \frac{V}{c} E_0^x, \quad (4.42)$$

где мы воспользовались (4.25). Волновой вектор в системе K' согласно (4.39) имеет компоненты

$$\mathbf{k}' = \{0, -\gamma V k/c, k\}.$$

Как и должно быть, $\mathbf{k}' \perp \mathbf{B}'_0$. Таким образом, определив $\mathbf{B}'_0$ и $\mathbf{k}'$, мы полностью определили поле $\mathbf{B}'$. В новой системе координат волна по-прежнему линейно поляризована.

• **Задача 2:** В лабораторной системе отсчёта K дана бегущая линейно поляризованная волна $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$, $\mathbf{k} = \{0, 0, k\}$, $\mathbf{E}_0 \parallel Ox$. Постройте тензор

энергии-импульса для такой волны, усреднённый по периоду колебаний. Система отсчёта K' движется со скоростью $\mathbf{V} = \{0, 0, V\}$. Запишите преобразование, связанное с переходом между системами отсчёта $K \rightarrow K'$, для поля волны и для тензора энергии-импульса, и покажите, что они дают соответствующие друг другу результаты.

Решение: Согласно (4.27, 4.31), тензор энергии-импульса плоской волны равен

$$T^{\mu\nu} = \frac{\mathbf{E}_0^2}{8\pi k^2} k^\mu k^\nu = \frac{\mathbf{E}_0^2}{8\pi} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В движущейся системе координат

$$\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]/c) = \gamma(1 - V/c)\mathbf{E}$$

согласно (3.18b) и (4.25). Волновой вектор не изменяет своего направления в системе K' , поскольку $\mathbf{k} \parallel \mathbf{V}$. Его абсолютное значение в K'

$$k' = \gamma(1 - V/c)k.$$

Если применить преобразование Лоренца непосредственно к тензору энергии-импульса,

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda'^\mu_\sigma \Lambda'^\nu_\varsigma T^{\sigma\varsigma} = \frac{\mathbf{E}^2}{4\pi k'^2} \Lambda'^\mu_\sigma k'^\sigma \Lambda'^\nu_\varsigma k'^\varsigma, \quad (4.43)$$

то пользуемся преобразованием для волнового вектора; тогда получаем, что в новой системе координат тензор энергии-импульса приобретает множитель $\gamma^2(1 - V/c)^2$. Если применять преобразование к электрическому полю и через него выражать $T^{\mu\nu}$, то, как и должно быть, получаем тот же самый фактор.

• **Задача 3:** Определите тензор энергии-импульса для стоячей линейно-поляризованной монохроматической электромагнитной волны (мгновенное значение и значение, усреднённое по периоду осцилляций). Предполагая, что стоячая волна ограничена плоскими зеркалами, найдите силу, с которой расталкиваются зеркала. Амплитуда колебаний электрического поля в волне равна E_0 .

Указание: Убедитесь, что давление может быть вычислено как сумма T^{zz} -компонент тензора энергии импульса двух бегущих волн (4.31) от и к поверхности зеркала с амплитудами $E_0/2$, где z — направление по нормали к зеркалу.

• **Задача 4:** Рассмотрите распространение гауссового аксиально симметричного линейно поляризованного монохроматического пучка (частота ω , направление распространения вдоль оси Oz). Гауссов пучок имеет плоский фронт на выходе испускающего его устройства, так что при $z = 0$ характеризуется поперечным профилем амплитуды волны $\exp(-\rho^2/2\sigma_0)$ с действительным σ_0 , где ρ — квадрат поперечной координаты. Сечение

пучка велико по сравнению с квадратом длины волны, то есть величина $\sigma_0 \gg \lambda^2$.

Решение: Напишем уравнение на какую-либо компоненту поля. Например, выберем A^x — компоненту, подразаеваемая поперечную калибровку. Параметризуем компоненту в виде $A^x = \exp(-i\omega t + ikz)f$, где известно, что огибающая

$$f(x, y, z = 0) = f_0 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 = \rho^2}{2\sigma_0}\right).$$

Волновое уравнение

$$\square A^x \approx e^{-i\omega t + ikz} (-2ik\partial_z + \Delta^\perp) f = 0.$$

Вклад, пропорциональный второй производной ∂_z^2 был опущен, поскольку, как это будет видно ниже, является малым по параметру $1/k\sqrt{\sigma}$. Решение получившегося двумерного уравнения Шредингера (в котором роль времени играет координата z) является

$$f = f_0 \frac{\sigma_0}{\sigma} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma}\right), \quad \sigma = \sigma_0 - iz/k.$$

Отметим, что на расстояниях $z \gg k\sigma_0$ комплексный параметр σ пропорционален z . Это соответствует тому, что на таких, далёких, расстояниях, пучок становится сферическим, в котором амплитуда волны убывает обратно пропорционально расстоянию.

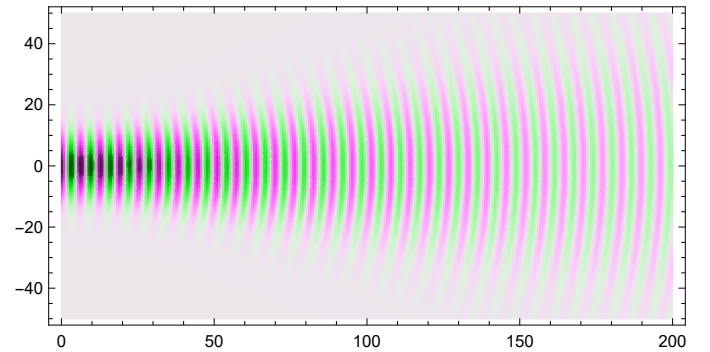


Рис. 4.1 Параметры пучка $k = 1$, $\sigma_0 = 49$. Зелёный и малиновый цвета соответствуют отрицательным и положительным значениям электрического поля.

Для того, чтобы найти ширину пучка, надо проследить профиль квадрата модуля амплитуды, определяющей величину потока энергии:

$$|f|^2 = \frac{f_0}{1 + z^2/(k^2\sigma_0^2)} \exp\left(-\frac{\rho^2}{\sigma_0 + z^2/k^2\sigma_0}\right).$$

Поперечный радиус пучка $\Delta\rho$ естественно определить как расстояние до оси, на котором интенсивность пада-

ет в ϵ раз. Тогда

$$\begin{aligned}\Delta\rho &= \sqrt{\sigma_0 + \frac{z^2}{k^2\sigma_0}} \rightarrow \frac{z}{k\sqrt{\sigma_0}}, \quad z \gg k\sigma_0, \\ \delta\phi \rightarrow \frac{\Delta\rho}{z} &= \frac{1}{k\sqrt{\sigma_0}} \sim \frac{\lambda}{\sqrt{\sigma_0}}.\end{aligned}\quad (4.44)$$

§4.4. Геометрическая оптика

Плоская волна (4.28) отличается тем, что амплитуда колебания поля в ней постоянна в пространстве-времени, а вся зависимость от времени и координаты содержится в фазе. Приближение геометрической оптики предполагает, что локально поле можно представить в виде плоской монохроматической волны. Однако на временах, больших по сравнению с периодом колебания волны, или на расстояниях, больших по сравнению с длиной волны, амплитуда волны и её волновой вектор могут заметно меняться.

Таким образом, предполагается разделение масштабов. Малые масштабы — это быстрые осцилляции волны. Большие масштабы — это изменение периода этих осцилляций и амплитуды волны. В соответствии с этим предположением, представим комплексную амплитуду волны в виде

$$\varphi = \text{Re}(a e^{i\psi}). \quad (4.45)$$

Фаза ψ называется *эйконалом* (*eikonal*). В пределе, когда применимо приближение геометрической оптики, эта величина изменяется намного быстрее, чем абсолютное значение амплитуды a . Мысленно зафиксируем a и сравним (4.45) с выражением для фазы плоской волны (4.28). Справедливо определить локальное значение частоты и волнового вектора как

$$\omega(t, \mathbf{r}) = -\frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad \mathbf{k}(t, \mathbf{r}) = \frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{r}}, \quad d\psi = -\omega dt + (\mathbf{k} \cdot d\mathbf{r}). \quad (4.46)$$

Волновое уравнение, в терминах комплексной амплитуды имеющее вид

$$e^{-i\psi}(\partial_t^2 - c^2\Delta)(a e^{i\psi}) = 0,$$

будучи разделённым на действительную и мнимую части, распадается на два действительных уравнения. Действительная часть уравнения может быть переписана в виде

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 - c^2 \left(\frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{r}}\right)^2 = \frac{(\partial_t^2 - c^2\Delta)a}{a} \rightarrow 0. \quad (4.47a)$$

В соответствии с нашим приближением, правую часть этого уравнения можно положить равной нулю, поскольку она мала по сравнению с квадратом первых производных фазы. Таким образом, в приближении гео-

метрической оптики уравнение (4.47a) оказывается ничем иным как дисперсионным соотношением

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \omega^2 = c^2 \mathbf{k}^2. \quad (4.47b)$$

Записанное в первом виде, это уравнение называют *уравнением эйконала*.

Мнимая часть волнового уравнения

$$\partial_t(\omega a^2) + c^2 \text{div}(\mathbf{k} a^2) = 0 \quad (4.48)$$

имеет вид сохранения энергии: плотность энергии пропорциональна ωa^2 , а плотность потока энергии пропорциональна $c^2 \mathbf{k} a^2$.

4-4.1 Монохроматическая волна

Предположим, что характеристики волны (амплитуда a , частота ω и волновой вектор $\mathbf{k}$) не зависят явно от времени. Такую волну следует назвать монохроматической: во всём пространстве её комплексная амплитуда зависит от времени как $\exp(-i\omega t)$ с одной и той же частотой ω . Действительно, поскольку

$$0 = \partial_t \mathbf{k} = -\text{grad } \omega \quad (4.49)$$

в силу (4.47a), то это означает, что частота ω постоянная не только во времени, но и в пространстве. Волновой вектор таким образом может изменять только своё направление:

$$\mathbf{k} = (\omega/c) \mathbf{n}, \quad \mathbf{n}^2 = 1. \quad (4.50)$$

Здесь единичный вектор $\mathbf{n}$ есть локальное направление распространения волны, или, как говорят — *луча*.

Найдём траекторию лучей. Для этого возьмём градиент от уравнения Эйконала (4.47b) и снова воспользуемся уравнением (4.47a):

$$0 = -\frac{\partial_k (g^{\mu\nu} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi)}{2k^2} = \frac{\partial_i \psi \partial_{ik} \psi}{k^2} = (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n} = 0. \quad (4.51)$$

Это уравнение означает, что вдоль направления распространения луча $\mathbf{n}$ оно само остаётся неизменным.

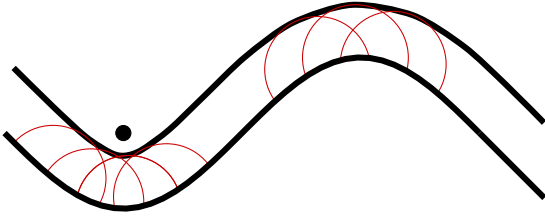


Рис. 4.2 Два волновых фронта. Чёрной точкой обозначен фокус (каустика).

4-4.1.1 Волновой фронт

Волновым фронтом называется поверхность $S = S(\psi_0, t)$ с постоянным значением фазы волны (эйконала) $\psi = \psi_0$ при фиксированном времени t . Поскольку волновой вектор $\mathbf{k}$ есть градиент эйконала, то в каждой точке поверхности S волновой вектор нормален ей. Важную роль для геометрической оптики играет средняя кривизна фронта (см. (9.29)):

$$K_m = -\text{div} \mathbf{n}.$$

§4.5. Симметрии в классической электродинамике

При общем анализе свойств решения физических уравнений важную роль играют симметрии этих уравнений. При феноменологическом построении уравнений, описывающих поведение новых физических систем, ограничения, накладываемые со стороны симметрий, позволяют заранее отбросить невозможные комбинации в уравнениях движения. Изучим симметричные свойства уравнений классической электродинамики.

Пространственная инверсия Пространственная инверсия подразумевает, что мы произвели замену знака координат,

$$P: \quad \mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}. \quad (4.53a)$$

Эта замена приведёт к изменению значений векторов и полей. При операции пространственной инверсии P не изменяют свой знак 0-компоненты 4-векторов, а пространственные части 4-векторов изменяются свои знаки.

Иными словами, пусть нам известен закон движения частиц и полей в системе. Если мы для всех частиц и полей произведём замену знаков в пространственных частях 4-координаты, 4-импульса частиц (2.1g), 4-

Рассмотрим два волновых фронта $S_{1,2}$ в один и тот же момент времени, соответствующих двум различным фазам $\psi_1 < \psi_2$. Если провести нормаль к одной поверхности, скажем S_1 , то будучи продолженной она окажется нормалью и для поверхности S_2 . Расстояние между точками пересечения $\Delta l = \Delta\psi/k$ согласно (4.47a), где разность между фазами фронтов $\Delta\psi = \psi_2 - \psi_1$, т.е. не зависит от выбора точки на фронте S_1 .

Полученный принцип легко может быть изображён графически, см. Рис. 4.2.

4-4.1.2 Интенсивность лучей

Пространственная структура линий распространения лучей и амплитуды лучей связаны уравнением (4.48), выражающем собой условие бездивергентности потока энергии:

$$\begin{aligned} \text{div}(\mathbf{n}a^2) &= (\mathbf{n} \cdot \nabla)a^2 + K_m a^2 = 0, \\ \text{or} \quad (\mathbf{n} \cdot \nabla) \ln(a^2) &= -K_m. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Таким образом, скорость относительного изменения интенсивности $(\mathbf{n} \cdot \nabla) \ln(a^2)$ вдоль луча определяется значением средней кривизны K_m фронта. Если средняя кривизна положительна, $K_m > 0$, т.е. соседние лучи расходятся, то интенсивность лучей по мере их распространения спадает. Если же, наоборот, соседние лучи сходятся, $K_m < 0$, то интенсивность лучей возрастает.

потенциале электромагнитного поля (3.1) и 4-тока,

$$\begin{aligned} P: \quad \{ct, \mathbf{r}\} &\rightarrow \{ct, -\mathbf{r}\}, \\ \{E/c, \mathbf{p}\} &\rightarrow \{E/c, -\mathbf{p}\}, \\ \{\varphi, \mathbf{A}\} &\rightarrow \{\varphi, -\mathbf{A}\}, \\ \{c\rho, \mathbf{j}\} &\rightarrow \{c\rho, -\mathbf{j}\}, \end{aligned} \quad (4.53b)$$

то получившиеся траектории также будут описывать движение другой системы, которая является зеркальным отражением исходной системы. Отметим, что трёх-мерное электрическое поле $\mathbf{E}$ и трёх-мерные вектора скорости $\mathbf{v}$ и электро-дипольного момента $\mathbf{d}$ также поменяют знак:

$$P: \quad \mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{E}, \quad \mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}, \quad \mathbf{d} \rightarrow -\mathbf{d}. \quad (4.53c)$$

Как нетрудно убедиться, действие для частиц (2.1a), для их взаимодействия с электромагнитным полем (3.2) и для электромагнитного поля самого по себе (4.1) не изменяются при преобразовании (4.53b).

Поскольку символ Леви-Чивиты, по определению, не изменяется при P -преобразовании, см. Пункт 8-2.2, то

магнитное поле $\mathbf{B}$, будучи аксиальным вектором, не изменяет своего знака. Не изменяет своего знака и момент импульса $\mathbf{L}$ (2.9a), а также пропорциональный ему магнитный момент частиц $\boldsymbol{\mu}$ (3.35a). У вектора Паули-Любанского S^μ (2.10) изменяет свой знак только нулевая компонента. Итак:

$$P : \quad \begin{aligned} \mathbf{B} &\rightarrow \mathbf{B}, & \mathbf{L} &\rightarrow \mathbf{L}, & \boldsymbol{\mu} &\rightarrow \boldsymbol{\mu}, \\ \{S^0, \mathbf{S}\} &\rightarrow \{-S^0, \mathbf{S}\}. \end{aligned} \quad (4.53d)$$

Обращение времени. Обращение знака времени предполагает замену

$$T : \quad t \rightarrow -t, \quad \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}. \quad (4.54a)$$

Координата $\mathbf{r}$ при этом остаётся неизменной. Приращение интервала ds при движении массивной частицы изменяет знак, поскольку изменяется знак нулевая компонента соответствующего приращения 4-вектора положения частицы dx^μ . Таким образом, у 4-вектора скорости изменяет знак пространственная часть:

$$T : \quad \begin{aligned} ds &\rightarrow -ds, & \text{on a particle's} \\ & & \text{world line} \\ \{u^0, \mathbf{u}\} &\rightarrow \{u^0, -\mathbf{u}\}. \end{aligned} \quad (4.54b)$$

Но действие для свободной частицы (2.1a) не должно изменить своего знака, что достигается переменной местами пределов интегрирования в интеграле вдоль мировой линии частицы. В действии (3.2), описывающем взаимодействие частиц и поля и записанном в виде интеграла вдоль мировых линий частиц, также меняются местами пределы интегрирования. Поэтому помимо применения правила (4.54a), распространяющегося в том числе и на dx^μ , мы должны добавить к этой части действия общий знак минус. Во второй форме записи (3.2) меняет знак пространственный ток $\mathbf{j}$, поскольку меняет знак пространственная часть 4-скорости. Мера интегрирования по объёму $d^4\Omega$ знак не меняет. Итак, для того, чтобы действие (3.2) не изменило знака, надо изменить знак у вектор-потенциала $\mathbf{A}$. Собирая всё вместе, получаем

правила для основных четырёх-мерных величин:

$$T : \quad \begin{aligned} \{ct, \mathbf{r}\} &\rightarrow \{-ct, \mathbf{r}\}, \\ \{E/c, \mathbf{p}\} &\rightarrow \{E/c, -\mathbf{p}\}, \\ \{\varphi, \mathbf{A}\} &\rightarrow \{\varphi, -\mathbf{A}\}, \\ \{c\rho, \mathbf{j}\} &\rightarrow \{c\rho, -\mathbf{j}\}, \end{aligned} \quad (4.54c)$$

Электрическое поле $\mathbf{E}$ и электро-дипольный момент $\mathbf{d}$ не поменяют своего знака, тогда как вектор скорости знак изменит,

$$T : \quad \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}, \quad \mathbf{d} \rightarrow \mathbf{d}, \quad \mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}. \quad (4.54d)$$

Поскольку у радиус-вектора $\mathbf{r}$ знак не поменялся, а у всех остальных 4-векторов знак пространственной части оказался изменён, то магнитное поле $\mathbf{B}$ (3.14), механический момент $\mathbf{L}$ знаки изменят и магнитный момент частиц (3.35a), как и пространственная часть вектора Паули-Любанского S^μ :

$$T : \quad \begin{aligned} \mathbf{B} &\rightarrow -\mathbf{B}, & \mathbf{L} &\rightarrow -\mathbf{L}, & \boldsymbol{\mu} &\rightarrow -\boldsymbol{\mu}, \\ \{S^0, \mathbf{S}\} &\rightarrow \{S^0, -\mathbf{S}\}. \end{aligned} \quad (4.54e)$$

Зарядовое сопряжение. Операция C предполагает изменение знака заряда у всех частиц. Должно изменить знак и электромагнитное поле для того, чтобы действие осталось неизменным:

$$C : \quad \begin{aligned} \{ct, \mathbf{r}\} &\rightarrow \{ct, \mathbf{r}\}, \\ \{E/c, \mathbf{p}\} &\rightarrow \{E/c, \mathbf{p}\}, \\ \{\varphi, \mathbf{A}\} &\rightarrow \{-\varphi, -\mathbf{A}\}, \\ \{c\rho, \mathbf{j}\} &\rightarrow \{-c\rho, -\mathbf{j}\}. \end{aligned} \quad (4.55a)$$

Из аксиальных трёх-мерных векторов поменяют знак только магнитное поле и магнитный момент частиц (3.35a):

$$C : \quad \begin{aligned} \mathbf{B} &\rightarrow -\mathbf{B}, & \mathbf{L} &\rightarrow \mathbf{L}, & \boldsymbol{\mu} &\rightarrow -\boldsymbol{\mu}, \\ \{S^0, \mathbf{S}\} &\rightarrow \{S^0, \mathbf{S}\}. \end{aligned} \quad (4.55b)$$

Глава 5

ЭЛЕКТРОСТАТИКА И МАГНИТОСТАТИКА

1	Неподвижные заряды постоянное электрическое поле	67
1.	Закон Кулона	67
2.	Поле системы статических зарядов	67
3.	Электростатическая энергия	69
4.	Энергия системы зарядов во внешнем электрическом поле	70
5.	Сила и момент сил, действующих на диполь	70
6.	Задачи	71
2	Постоянные токи и магнитное поле	73
1.	Закон Био-Савара-Лапласа	73
2.	Магнито-дипольный момент	74
3.	Потенциальная энергия системы токов в магнитном поле	74
4.	Теорема Лармора	75
5.	Задачи	75
6.	Постоянные электрическое и магнитное поля	76

§5.1. Неподвижные заряды постоянное электрическое поле**5-1.1 Закон Кулона**

Продemonстрируем сперва, как вытекает закон Кулона из выражения (4.10) для запаздывающих потенциалов. Для этого предположим статическое распределение зарядов, так что в 4-токе (1.9a) ненулевой является только ρ -компонента (и она не зависит от времени), тогда как ток $\mathbf{j} = 0$. Тогда единственным нетривиальным уравнением в (4.7) является уравнение Пуассона на скалярный потенциал

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \quad (5.1a)$$

Мы предполагаем, что эта задача решается в неограниченном пространстве, и вдалеке от рассматриваемой системы зарядов потенциал стремится к нулю. Тогда элементарной задачей, используя решение которой можно найти $\varphi(\mathbf{r})$, является уравнение на функцию Грина G_C

$$\Delta G_C(\mathbf{r}) = -4\pi\delta(\mathbf{r}), \quad \varphi(\mathbf{r}) = \int G_C(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3r' \rho(\mathbf{r}').$$

Функцией Грина, удовлетворяющей указанным уравнению и граничным условиям на бесконечности, является

$$G_C(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \quad (5.1b)$$

Решение для потенциала в явном виде есть

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}') d^3r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \mathbf{A} = 0. \quad (5.1c)$$

Можно убедиться, что к этим же уравнениям приводит уравнение на запаздывающие потенциалы (4.10), записанное отдельно для временной и пространственных и компонент. Согласно (3.14), электромагнитное поле

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi, \quad \mathbf{B} = 0. \quad (5.1d)$$

Уравнение (5.1c) называют *законом Кулона*, а φ в данном случае — *электростатическим потенциалом*.

Пусть есть только два точечных заряда e_1 и e_2 , расположенных в точках $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ соответственно. Тогда потенциал φ_1 и электрическое поле $\mathbf{E}_1$, создаваемые первым зарядом, равны

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{e_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|}, \quad \mathbf{E}_1 = -\text{grad } \varphi_1 = \frac{e_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3}.$$

Сила $\mathbf{F}_{21}$ (3.15), действующая со стороны первого заряда на второй, равна

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{e_1 e_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (5.1e)$$

Собственно, это равенство принято называть *законом Кулона* (*Coulomb's law*).

5-1.2 Поле системы статических зарядов

Рассмотрим систему статических зарядов, ограниченную в пространстве. Пусть характерный диаметр системы равен a , начало координат поместим внутрь этой системы. Мы будем интересоваться полем, создающимся этими зарядами на расстояниях r , больших по сравнению с размером системы a , $r \gg a$. Заряды будем нумеровать индексом α , положение заряда $\mathbf{r}_\alpha$, величину заряда — e_α .

Потенциал поля рассматриваемой системы зарядов определяется формулой (5.1c). В нашем случае интегрирование по $\mathbf{r}'$ в (5.1c) ограничивается областью $r' < a$, где только и находятся заряды. Если мы рассматриваем область $r > a$, то в этой области зарядовая плотность ρ равна нулю и согласно (5.1a) потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0.$$

Кроме того, потенциал убывает при удалении от системы. Поэтому φ может быть разложен по сферическим функциям:

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{Q}{r} + \frac{d^i n^i}{r^2} + \frac{D^{ik} n^i n^k}{2r^3} + \frac{D^{ikl} n^i n^k n^l}{6r^4} + \dots = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \left(\sum_{m=-l}^{m=l} C_{lm} \mathcal{Y}_{lm} = \varphi_l \right),\end{aligned}\quad (5.2a)$$

где $\mathcal{Y}_{lm}(\vartheta, \phi)$ — сферические гармоники (см., например, [Olver и др., 2010, §14.30]), а единичный вектор $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Первое и второе равенство в (5.2a) представляют собой разные, наиболее часто используемые формы записи членов разложения потенциала φ по обратным степеням r .

Поясним происхождение и устройство рядов (5.2a).

Определим структуру тензоров D , исходя из того, что в них должна содержаться только полезная информация. Каждый тензор D должен быть симметричен по любой паре индексов, поскольку антисимметричная часть выпадает после его свёртки с симметричным произведением компонент единичного вектора $\mathbf{n}$. Кроме того, след по любой паре индексов должен быть положен равным нулю,

$$D^{kk\dots} = 0. \quad (5.2b)$$

Действительно, потребуем явно, что l -й член ряда удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta \left(\frac{D^{ikl\dots} n^i n^k n^l \dots}{r^{l+1}} \right) = \frac{l(l-1)D^{iil\dots} r^l \dots}{r^{2l+1}} = 0,$$

что показывает необходимость (5.2b).

Зная все симметрии тензора D порядка l , мы можем комбинаторным подсчётом найти количество линейно независимых элементов в этом тензоре. Симметричность тензора по любой паре индексов сокращает количество линейно независимых матричных элементов с 3^l до $(l+2)(l+1)/2$. Будем менять теперь первые два индекса, зафиксировав все остальные. Мы обнаружим $6 = (2+2)(2+1)/2$ пока считающиеся независимыми элемента. Но если мы сложим вместе те три из них, у которых значения первых двух индексов совпадают, то получим нуль; и таких линейных связей $l(l-1)/2$ по числу вариантов в оставшихся $l-2$ индексах. Это означает, что во всём тензоре число линейно независимых компонент равно

$$2l+1 = \frac{(l+2)(l+1)}{2} - \frac{l(l-1)}{2}.$$

Тензора $D^{ik\dots}$ называются (электрическими) 2^l -польными моментами системы зарядов. В частности, $\mathbf{d}$ — дипольным, D^{ik} — квадрупольным, а D^{ikl} — октупольными моментами.

Разумеется, между коэффициентами C_{lm} с фиксированным l и коэффициентами $D^{i\dots}$ с количеством индексов равным l существует невырожденная линейная

связь. Поэтому число $2l+1$ есть и количество линейно независимых сферических гармоник $\mathcal{Y}_{lm}(\vartheta, \phi)$ этого порядка. Стандартом является $\mathcal{Y}_{lm}(\vartheta, \phi) \propto \exp(im\varphi)$, где целое число $-l \leq m \leq l$.

Ряды (5.2a) соответствуют разложению в (5.1c) по малому параметру a/r . Действительно, произведём разложение в подынтегральном выражении (5.1c), полагая, что $|\mathbf{r}'| \leq a$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \left(1 - 2 \left(\frac{\mathbf{r}'}{r} \cdot \mathbf{n} \right) + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{-1/2} = \\ &= \frac{1}{r} + \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')}{r^2} + \frac{3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')^2 - r'^2}{2r^3} + \dots,\end{aligned}\quad (5.2c)$$

Чем больше l , тем быстрее убывает соответствующий вклад в потенциал. Поэтому на далёких расстояниях от системы достаточно знать только первые коэффициенты в разложении (5.2a) для приближённого описания распределения электрического поля в пространстве. Таким образом, тогда как система может содержать большое количество хаотически распределённых в пространстве зарядов, достаточно знать не более десятка интегральных параметров этого распределения, чтобы описать электрическое поле вдали от системы.

Обратимся к интерпретации членов разложения ряда (5.2a), начав с нулевого члена разложения. Он соответствует сферически симметричному потенциалу, убывающему как $1/r$. Величина Q в (5.2a) является полным зарядом системы,

$$Q = \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}').$$

5-1.2.1 Дипольный момент

Величины d^i составляют вектор, который называется *дипольным моментом* системы. Сравнивая первый член разложения (5.1c) по параметру $r'/r \ll 1$, см. (5.2c), и определение (5.2a) φ_l получаем, что дипольный момент системы зарядов равен

$$\begin{aligned}\frac{\varphi_1}{r^2} &= \int \frac{\rho(\mathbf{r}') (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n})}{r^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{d} = \int d^3 r \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha},\end{aligned}\quad (5.2d)$$

согласно виду разложения (5.2a).

Дипольный момент определён однозначно только в том случае, если полный заряд системы равен нулю, $Q = 0$. В противном случае значение дипольного момента зависит от выбора начала системы координат; в частности, существует система координат, в которой дипольный момент заряженной системы равен нулю.

Точечным электрическим диполем $\mathbf{d}$, расположенным в начале координат, по определению называют распределение зарядов

$$\rho(\mathbf{r}) = -(\mathbf{d} \cdot \nabla) \delta(\mathbf{r}) = -\operatorname{div}(\mathbf{d} \delta(\mathbf{r})). \quad (5.2e)$$

Такое распределение зарядов обладает только дипольным моментом, так что в разложении (5.2a) является ненулевым только вклад с $l = 1$. Электрическое поле точечного диполя

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \frac{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n})}{r^2} = \frac{3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{d}}{r^3}. \quad (5.2f)$$

Рисунок поля диполя ...

Предположим, что полный заряд системы равен нулю, то есть система электронейтральна. Однако по тем или иным причинам в ней произошло пространственное смещение положительных и отрицательных зарядов относительно друг друга. В таком случае возможно представить распределение заряда через *плотность электрической поляризации* $\mathbf{P}(\mathbf{r})$. Локальная плотность заряда в системе

$$\rho = -\text{div} \mathbf{P}. \quad (5.2g)$$

В частности, для точечного диполя (5.2f) естественно поставить в соответствие

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \mathbf{d} \delta(\mathbf{r}).$$

При известной объёмной плотности зарядов ρ выбор вектора $\mathbf{P}$ неоднозначен; его выбор должен соответствовать физическому смыслу, согласно которому $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ есть плотность дипольного момента. В частности, вне системы он должен обращаться в ноль. Из (5.2d) вытекает, что дипольный момент системы

$$\mathbf{d} = \int d^3r \mathbf{P}(\mathbf{r}). \quad (5.2h)$$

5-1.2.2 Квадрупольный момент

Если и полный заряд системы и её дипольный момент относительно малы, то имеет смысл интересоваться также и *квадрупольным моментом* системы, задаваемым матрицей D^{ik} . Второй порядок разложения по малому параметру a/r в (5.1c) равен (см. (5.2c))

$$\frac{\varphi_2}{r^3} = \frac{1}{2} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}') (3(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n})^2 - |\mathbf{r}'|^2)}{r^3} \Rightarrow \quad (5.2i)$$

$$D^{ik} = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) (3r^i r^k - |\mathbf{r}|^2 \delta^{ik})$$

в силу определения (5.2a). Легко проверить, что необходимые свойства матрицы квадрупольного момента $D^{ki} = D^{ik}$ и $D^{ii} = 0$ выполняются. Всего существует 5 независимых параметров, определяющих квадрупольный момент системы.

Значение квадрупольного момента не зависит от выбора начала системы координат только в том случае, если полный заряд и дипольный момент системы равны нулю.

Если распределение зарядов в системе осесимметрично, то соответствующей симметрией обладает тензор

квадрупольного момента. Направим ось Oz по оси симметрии, тогда тензор дипольного момента будет иметь вид

$$\|D^{ik}\| = \begin{pmatrix} -D/2 & 0 & 0 \\ 0 & -D/2 & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix} \quad (5.2j)$$

Величину D в этом случае называют просто квадрупольным моментом.

5-1.3 Электростатическая энергия

Рассмотрим систему неподвижных зарядов, которую можно считать бесконечно удалённой от других зарядов. Тогда полная энергия системы равна

$$E_{\text{tot}} = \int d^3r T^{00} = Mc^2 + E,$$

см. (4.18), где M — суммарная масса покоя всей системы, а E — энергия электрического поля $\mathbf{E}$ всей системы, также называемая *электростатической энергией*. Пусть распределение зарядов в пространстве описывается зарядовой плотностью $\rho(\mathbf{r})$. Тогда электростатическая энергия E может быть записана в следующих видах:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{8\pi} \int d^3r \mathbf{E}^2 = \frac{1}{2} \int d^3r \rho \varphi = \\ &= \frac{1}{2} \int d^3r_1 d^3r_2 \frac{\rho(\mathbf{r}_1)\rho(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}, \end{aligned} \quad (5.3a)$$

Первое выражение соответствует выражению для T^{00} -компоненты тензора энергии-импульса электромагнитного поля (4.21a) и тому, что полный тензор энергии-импульса является прямой суммой вкладов от частиц и электромагнитного поля, см. (4.18).

Второе выражение в (5.3a) получено из первого путём использования уравнения Пуассона (5.1a) и интегрирования по частям. Этот вид записи электростатической энергии соответствует выражению для гамильтониана точечной частицы в электромагнитном поле (3.5). Множитель $1/2$ в (5.3a) компенсируется тем, что энергия взаимодействия каждой пары зарядов учитывается 2 раза. Двойной учёт энергии взаимодействия более явно демонстрирует третья форма записи в (5.3a), которая может быть получена путём подстановки φ в виде решения (5.1c).

5-1.3.1 Классический радиус электрона

Если формально посчитать электростатическую энергию точечного заряда, то мы получим расходящийся на малых масштабах интеграл в первом варианте записи (5.3a). Реально в физике такой проблемы не существует, поскольку в силу квантовых эффектов все частицы на малых расстояниях описываются локализованной в конечном объёме волновой функцией. А если зарядовая

плотность остаётся конечной во всём пространстве, то из третьей формы записи в (5.3a) следует, что электростатическая энергия также является конечной. Тем не менее, формально в классической релятивистской электродинамике рассматриваются только точечные частицы, что делает эту теорию неприменимой на малых масштабах и, вообще говоря, содержащей внутренние противоречия.

Отойдём от строгости классической электродинамики и представим электрон как полую сферу радиуса r_0 , по которой равномерно распределён его заряд. Скажем, что энергия покоя электрона $m_e c^2$ есть чисто электростатическая энергия, тогда

$$\frac{e^2}{r_0} = m_e c^2, \quad r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2.8 \cdot 10^{-13} \text{ см.} \quad (5.3b)$$

Построенная таким образом величина r_0 называется “классическим радиусом электрона”, или *радиусом Лоренца*, а также *длиной томсоновского рассеяния* (*the classical electron radius, the Lorentz radius, or the Thomson scattering length*). Подчеркнём, однако, что самостоятельного физического смысла длина r_0 не имеет.

5-1.4 Энергия системы зарядов во внешнем электрическом поле

Теперь зададимся вопросом — какова энергия E_E локализованной в пространстве системы неподвижных зарядов во внешнем стационарном электрическом поле? Как мы увидим, в выражение для приближённого значения этой энергии входят уже введённые мультипольные моменты.

Пусть все заряды разделены на две части,

$$\rho_{\text{tot}} = \rho + \rho_{\text{ext}}, \quad (5.3c)$$

где ρ_{tot} — полная плотность зарядов, ρ — плотность зарядов в интересующей нас системе, а ρ_{ext} — плотность тех ‘внешних’ зарядов, которые создают электрическое поле $\mathbf{E}$, действующее на интересующую нас систему. Мы будем предполагать, что положение ‘внешних’ зарядов фиксировано и разделено в пространстве с зарядами системы.

Нас интересует энергия взаимодействия E_E ‘внешних’ зарядов и зарядов системы. Из (5.3a) следует, что эта энергия равна

$$\begin{aligned} E_E &= \int \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}') \frac{d^3 r' d^3 r}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}) = \int d^3 r \varphi_{\text{ext}} \rho = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3 r (\mathbf{E}_s \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}), \end{aligned} \quad (5.3d)$$

где мы обозначили через φ_{ext} электростатический потенциал, создаваемый ‘внешними’ зарядами, $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ — электрическое поле внешних зарядов, а $\mathbf{E}_s$ — поле, создаваемое исследуемой системой зарядов, так что

$$\mathbf{E}_{\text{ext}} = -\text{grad } \varphi_{\text{ext}}, \quad \text{div } \mathbf{E}_s = 4\pi\rho.$$

Выражение (5.3d) может быть также получено из выражения для потенциальной энергии точечного заряда (3.5).

5-1.4.1 Энергия поляризованного тела во внешнем поле

Пусть полный заряд системы равен нулю, так что объёмная плотности заряда представима через поляризацию $\mathbf{P}$, см. (5.2g). В таком случае энергия тела во внешнем поле может быть записана в виде

$$E_E = - \int d^3 r (\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}), \quad (5.3e)$$

который продолжает цепочку равенств (5.3d).

5-1.4.2 Мультипольное разложение энергии системы зарядов во внешнем поле

Сейчас мы предполагаем, что ‘внешние’ заряды находятся на расстоянии от системы, большом по сравнению с её характерным диаметром a . Поэтому потенциал φ_{ext} медленно меняется внутри системы. Выберем какую-либо точку $\mathbf{R}$, находящуюся внутри системы зарядов, и пусть вектор $\mathbf{r}$ — отклонение от этой точки. Тогда потенциал φ_{ext} можно разложить в ряд

$$\varphi_{\text{ext}} = \varphi + \varphi_i r^i + \frac{1}{2} \varphi_{ik} r^i r^k + \frac{1}{6} \varphi_{ikl} r^i r^k r^l + \dots \quad (5.3f)$$

где, например, φ_{ik} означает 2-х кратную производную от потенциала φ_{ext} по направлениям ‘ i ’ и ‘ k ’, взятую в точке $\mathbf{R}$. Симметричные свойства тензоров φ совпадают с симметричными свойствами тензоров мультипольных моментов D (5.2a). Действительно, во-первых φ симметричны по перестановкам индексов, поскольку результат не зависит от порядка дифференцирования. Во-вторых, свёртка по любой паре индексов в любом коэффициенте разложения даёт нуль, поскольку в области расположения системы зарядов потенциал ‘внешних’ зарядов удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta \varphi_{\text{ext}} = 0$. Вообще, разложение (5.3f) аналогично разложению (5.2a), но только в текущем случае разложение потенциала регулярно в нуле.

Теперь в последнем равенстве (5.3d) остаётся проинтегрировать по $\mathbf{r}$ каждый член разложения (5.3f). При этом получаются как раз мультипольные моменты, так что в итоге энергия взаимодействия записывается в виде ряда

$$E_E = \varphi Q - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}) + \frac{1}{6} D_{ik} \varphi_{ik} + \frac{1}{90} D_{ikl} \varphi_{ikl} + \dots \quad (5.3g)$$

5-1.5 Сила и момент сил, действующих на диполь

Найдём силу и момент сил, действующие на систему зарядов как целое со стороны внешнего электрического поля. Будем считать систему электро нейтральной, и рассмотрим самую простую ситуацию, когда распределение зарядов в системе достаточно характеризовать её дипольным моментом $\mathbf{d}$. Для лаконичности записи внешнее по отношению к системе электрическое поле лишим индекса, так что

$$\mathbf{E}_{\text{ext}} \rightarrow \mathbf{E}.$$

Положение системы как целого определяется вектором $\mathbf{R}$. Система может не только двигаться поступательно, но и вращаться в пространстве. Последнее приводит к вращению её дипольного момента $\mathbf{d}$. Внутреннюю структуру системы мы считаем неизменной.

Лагранжиан системы как целого во внешнем поле может быть выделен из полного лагранжиана:

$$L(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}, \mathbf{d}) = \frac{M\dot{\mathbf{R}}^2}{2} - E_{\text{E}} + \text{“}\rho^2\text{”} + \text{“}\rho_{\text{ext}}^2\text{”} \quad (5.4a)$$

где M — полная масса системы, а потенциальная энергия диполя во внешнем поле согласно (5.3g)

$$E_{\text{E}} = -(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}), \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{R}).$$

Мы использовали нерелятивистское выражение для кинетической энергии, поскольку речь идёт о статическом распределении зарядов. Два последних вклада, записанные символически и соответствующие электростатической энергии отдельных подсистем, остаются постоянными, поскольку внутренняя конфигурация зарядов системы, как и ‘внешних’ зарядов, остаётся неизменной.

Сила $\mathbf{F}$, действующая на диполь как целое со стороны внешнего поля $\mathbf{E}$, равна (магнитное поле отсутствует, поэтому обобщённый импульс $\mathbf{P}_{\text{gen}}$ совпадает с просто импульсом $\mathbf{P}$)

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &\equiv \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{R}}} = \\ &= \frac{\partial L}{\partial \mathbf{R}} = -\text{grad } E_{\text{E}} = \text{grad}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}) = (\mathbf{d} \cdot \nabla) \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (5.4b)$$

Последнее равенство было написано, поскольку

$$0 = [\mathbf{d} \times \text{rot } \mathbf{E}] = \text{grad}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}) - (\mathbf{d} \cdot \nabla) \mathbf{E},$$

и в процессе варьирования должно подразумеваться, что дипольный момент $\mathbf{d}$ не зависит от координаты.

Для того, чтобы получить момент сил, действующий на диполь, представим вариацию координаты $\mathbf{r}$ каждого заряда, составляющего диполь, в виде $\delta \mathbf{r} = [\delta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]$, где вектор углового поворота $\delta \boldsymbol{\omega}$ зависит только от времени. В таком случае вариация дипольного момента всей

системы равна $\delta \mathbf{d} = [\delta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}]$. Момент сил $\mathbf{M}$, действующий на диполь, равен

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\boldsymbol{\omega}}} = \\ &= \frac{\delta L}{\delta \boldsymbol{\omega}} = \frac{(\mathbf{E} \cdot \delta \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{d})}{\delta \boldsymbol{\omega}} = [\mathbf{d} \times \mathbf{E}]. \end{aligned} \quad (5.4c)$$

где, напомним, $\mathbf{L}$ — момент импульса системы.

5-1.6 Задачи

• **Задача 1:** Используя выражение для Максвелловского тензора напряжений, посчитайте силу, действующую на обкладку конденсатора (расстояние между пластинами d , площадь пластин S , заряд пластин Q)

• **Задача 2:** Рассмотрите функции углов, являющиеся произведениями компонент единичного вектора:

$$n_i, \quad n_i n_k, \quad n_i n_k n_l, \quad n_i n_k n_l n_n, \quad n_i n_k n_l n_n n_j.$$

Проведите усреднение этих функций по единичной сфере $n_i n_i = 1$; это есть способ выделения гармоники $l = 0$. Используя линейные комбинации первых трёх функций, составьте функции, пропорциональные сферическим гармоникам порядков $l = 1, 2, 3$; делать это надо из соображения, что при каждом фиксированном l тензор соответствующего ранга должен быть симметричным по всем индексам и давать нуль при свёртке по паре индексов. Убедитесь, что результат совпадает с табличным [Olver и др., 2010](#).

Дипольный момент • **Задача 3:** Однородно поляризованный шар массы M и радиуса a помещён в однородное электрическое поле $\mathbf{E}$. Дипольный момент шара равен $\mathbf{d}$, в начальный момент времени шар был неподвижен, а вектор $\mathbf{d}$ составлял малый угол φ_0 с вектором $\mathbf{E}$. Определить дальнейшее движение шара.

• **Задача 4:** Тело массы m , обладающее фиксированным во времени дипольным моментом, может без трения двигаться не вращаясь вдоль прямого стержня. Дипольный момент тела равен d , он направлен поперёк стержня. На расстоянии L от стержня, большом по сравнению с размерами тела, помещён точечный заряд Q . Как должен быть ориентирован дипольный момент, чтобы при небольшом отклонении положения тела от максимального сближения с зарядом оно совершало малые колебания. Чему равен период этих колебаний?

• **Задача 5:** Электрическое поле в системе зарядов имеет распределение $\mathbf{E} = (3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d})\mathbf{n} - \mathbf{d})re^{-4r/a}$, где $\mathbf{d}$ — постоянный вектор, a — константа и $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Найдите распределение заряда в системе; изобразите его на рисунке. Чему равен полный заряд системы?

Квадрупольный момент • **Задача 6:** Два отрицательных заряда $-q$ расположена на концах отрезка длиной a , а в центре этого отрезка находится заряд $2q$. Найдите электростатический потенциал этой системы зарядов на расстояниях $r \gg a$ от неё.

• **Задача 7:** Положительный заряд $+Q$ распределён равномерно по длинному цилиндру длиной L и диаметром $2a$, $L \gg a$, а компенсирующий его отрицательный заряд $-Q$ находится в центре цилиндра. Найдите электростатический потенциал этой системы зарядов на расстояниях $r \gg L$ от неё. Нарисуйте силовые линии электрического поля в плоскости, содержащей ось цилиндра.

• **Задача 8:** Четыре точечных заряда Q расположены в вершинах квадрата со стороной a . В центре этого квадрата расположен компенсирующий заряд $-4Q$. Найдите поле этой системы зарядов на расстояниях $r \gg a$. Нарисуйте распределение электрического поля в плоскости, содержащей компенсирующий заряд и перпендикулярной плоскости, в которой расположены все заряды.

• **Задача 9:** Дан равномерно заряженный эллипсоид с полным зарядом Q и полуосями a , b и c , в центре эллипсоида помещён компенсирующий точечный заряд $-Q$.

- Найдите квадрупольный момент такой системы зарядов.
- Найти электростатический потенциал на больших расстояниях, считая, что в центре эллипсоида находится компенсирующий точечный заряд $-Q$. Как с удалением от системы убывает потенциал и электрическое поле?
- Построить график угловой зависимости радиальной компоненты электрического поля в плоскости Oxy в случае, когда $2c^2 = a^2 + b^2$, $a > b$.
- Как изменится электростатический потенциал на далёких расстояниях, если компенсирующий точечный заряд сместить вдоль первой полуоси a на поверхность эллипсоида?

• **Задача 10:** Металлический шар радиуса a разрезали пополам и половинки разнесли на расстояние, малое по сравнению с его радиусом. После этого с одной половины на другую перенесли заряд такой, что разность потенциалов между половинами стала равна $2\varphi_0$. Определите дипольный момент системы.

Сферически-симметричный электро-нейтральный атом

• **Задача 11:** Заряды ядра и электронного облака в основном состоянии атома водорода образуют следу-

ющую объёмную плотность заряда

$$\rho(r) = e\delta(\mathbf{r}) - \frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right),$$

где $e > 0$ — элементарный заряд, $a \sim 10^{-8}$ см — боровский радиус, а первое и второе слагаемые соответствуют ядру и электрону. Найдите электростатический потенциал такой системы. Проверьте полученный результат, отдельно рассмотрев асимптотики $r \ll a$, на которой электрическое поле должно определяться в основном ядром, и $r \gg a$, на которой система должна выглядеть как почти электро нейтральная. Найдите электростатическую энергию взаимодействия электронного облака с ядром.

• **Задача 12:** Найти поправку к этой энергии, положив ядро равномерно заряженным шаром радиуса $r_{\text{я}} \sim 10^{-13}$ см.

Двумерная решётка зарядов • **Задача 13:** На поверхности (плоскость Oxy , $z = 0$) распределён заряд с поверхностной плотностью $\sigma(x, y) = \sigma_0 J_0(r_{\perp}/a)/(1 + r_{\perp}^2/L^2)$, где $r_{\perp} = \sqrt{x^2 + y^2}$, $J_0(\zeta)$ — функция Бесселя нулевого порядка. Параметры распределения $L = 1$ м, $a = 1$ мм. Найдите распределение электростатического поля в пространстве на близких $r \ll L$ и далёких $r \gg L$ расстояниях от начала координат.

Указания:

- Для нахождения поля на близких расстояниях совершите Фурье-преобразование в плоскости Oxy , оставив координату z ; в этом представлении запишите уравнение Пуассона на потенциал электрического поля
- на близких расстояниях можно пренебречь плавно изменяющимся множителем $(1 + r_{\perp}^2/L^2)^{-1}$ в распределении поверхностного заряда.
- функция Бесселя удовлетворяет уравнению $(\partial_x^2 + \partial_y^2)J_0(r_{\perp}/a) = -a^{-2}J_0(r_{\perp}/a)$
-

$$\int d\zeta \frac{\zeta J_0(\zeta)}{1 + (\zeta/\zeta_0)^2} = \zeta_0^2 K_0(\zeta_0) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \zeta_0^{3/2} \exp(-\zeta_0).$$

при $\zeta_0 \gg 1$.

• **Задача 14:** На поверхности (плоскость Oxy , $z = 0$) распределён заряд с поверхностной плотностью $\sigma(x, y) = \sigma_0 \cos(x/a) \cos(y/a)/(1 + x^2/L^2)/(1 + y^2/L^2)$. Параметры распределения $L = 1$ м, $a = 1$ мм. Найдите распределение электростатического поля в пространстве на близких $r \ll L$ и далёких $r \gg L$ расстояниях от начала координат.

Указания:

- Для нахождения поля на близких расстояниях совершите Фурье-преобразование в плоскости Oxy , оставив координату z ; в этом представлении запишите уравнение Пуассона на потенциал электрического поля

- ii) на близких расстояниях можно пренебречь плавно изменяющимся множителем $((1 + x^2/L^2)(1 + y^2/L^2))^{-1}$ в распределении поверхностного заряда.

• **Задача 15:** На поверхности (плоскость Oxy , $z = 0$) распределён заряд с поверхностной плотностью $\sigma(x, y) = \sigma_0 \cos(x/a)/(1 + x^2/L^2)/(1 + y^2/L^2)$. Параметры распределения $L = 1\text{м}$, $a = 1\text{мм}$. Найдите распределение электростатического поля в пространстве на близких $r \ll L$ и далёких $r \gg L$ расстояниях от начала координат.

Указание:

- i) Для нахождения поля на близких расстояниях совершите Фурье-преобразование в направлении Ox , оставив координаты y, z ; в этом представлении запишите уравнение Пуассона на потенциал электрического поля
- ii) на близких расстояниях можно пренебречь плавно изменяющимся множителем $1/(1 + x^2/L^2)$ в распределении поверхностного заряда.

§5.2. Постоянные токи и магнитное поле

Рассмотрим систему постоянных во времени токов, описываемую распределением тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$. В таком случае токи являются бездивергентными, $\text{div } \mathbf{j} = 0$, поскольку объёмная плотность зарядов в системе по нашему предположению не изменяется со временем. Мы будем считать, что статические объёмные заряды в системе отсутствуют.

Будем исследовать электромагнитное поле, индуцированное этой системы. Электрическое поле равно нулю, что можно увидеть, записав 4-потенциал в калибровке Лоренца: в ней скалярный потенциал равен нулю, $\varphi = 0$, а вектор-потенциал не зависит от времени, см. (3.14). Таким образом, система стационарных токов создаёт вне себя только статическое магнитное поле $\mathbf{B}$, удовлетворяющее уравнениям

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (5.5a)$$

Соотношение, позволяющее определить магнитное поле по распределению токов в пространстве, называется *законом Био-Савара-Лапласа* и получено в Пункте 5-2.1.

Также как это было сделано в Пункте 5-1.2 для системы неподвижных зарядов, магнитное поле вокруг системы токов возможно аппроксимировать на далёких от неё расстояниях, используя только несколько интегральных параметров пространственного распределения токов внутри системы. Действительно, вне системы токов пустота, поэтому там магнитное поле потенциально, поскольку удовлетворяет уравнению $\text{rot } \mathbf{B} = 0$. Поскольку оно и бездивергентно, $\text{div } \mathbf{B} = 0$, то потенциал магнитного поля φ_B удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\mathbf{B} = -\text{grad } \varphi_B, \quad \Delta \varphi_B = 0. \quad (5.5b)$$

Потенциал φ_B убывает на далёких расстояниях от системы токов. Поэтому он представим в виде ряда, аналогичного ряду для потенциала статического электрического поля (5.2a):

$$\varphi_B = \frac{\mu^i n^i}{r^2} + \frac{\mathbf{m}^{ik} n^i n^k}{2r^3} + \frac{\mathbf{m}^{ikl} n^i n^k n^l}{6r^4} + \dots = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varphi_{Bl}}{r^{l+1}}. \quad (5.5c)$$

Нулевой член разложения (с $l = 0$) в этом ряде отсутствует, поскольку $\text{div } \mathbf{B} = 0$ во всём пространстве (иными словами, у системы отсутствует магнитный заряд). Вектор $\boldsymbol{\mu}$ называется вектором магнито-дипольного момента системы.

Аналогия между электростатикой и магнитостатикой распространяется и на поведение системы токов во внешнем магнитном поле, см. Пункт 5-1.4.

В рассуждениях мы предполагаем, что система токов обладает пространственной конфигурацией, не зависящей от времени. Тем не менее, все результаты можно обобщить на случай, когда система токов (движущихся зарядов) хотя формально не стационарна, но возможно произвести усреднение по времени, получив в среднем стационарную систему токов. В таком случае под плотностью тока $\mathbf{j}$ следует понимать усреднённую по времени плотность тока:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sum_a e_a \langle \mathbf{v}_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \rangle, \quad \text{div } \mathbf{j} = 0, \quad (5.5d)$$

где угловые скобки означают усреднение по времени, а индекс a нумерует заряды в системе. Поскольку ток $\mathbf{j}$ стационарен и ограничен в пространстве, его дивергенция равна нулю.

5-2.1 Закон Био-Савара-Лапласа

Получим *закон Био-Савара-Лапласа (Biot-Savart law)*. Для этого предположим, что в пространстве нет нескомпенсированных зарядов, $\rho = 0$, а токи постоянны $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$. Уравнение (5.5a) удобнее решать через вектор-потенциал в калибровке Лоренца:

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (5.6a)$$

см. общее выражение (4.10) для запаздывающих потенциалов и сравни с (5.1a, 5.1c). Для того, чтобы найти магнитное поле, надо воспользоваться $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, см.

(3.14). В индексном виде получаем

$$\begin{aligned} B^i(\mathbf{r}) &= \epsilon_{ikl} \frac{\partial A^l}{\partial r^k} = \frac{\epsilon_{ikl}}{c} \int j^l(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \frac{\partial}{\partial r^k} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \\ &= \frac{1}{c} \int \frac{\epsilon_{ikl} j^l(\mathbf{r}') (r'^k - r^k) d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \end{aligned} \quad (5.6b)$$

Это же самое, записанное в векторных обозначениях, принимает вид закона Био-Савара-Лапласа:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (5.6c)$$

5-2.2 Магнито-дипольный момент

В этом Пункте мы покажем, что магнитное поле $\mathbf{B}$, создающееся системой стационарных токов на далёком от себя расстоянии, может быть представлено как поле магнитного диполя $\boldsymbol{\mu}$. Свойства этого диполя аналогичны свойствам электрического диполя, но создаёт и взаимодействует магнитный диполь с магнитным полем.

Исследуем формулу (5.6a) на далёких расстояниях, при $r \rightarrow \infty$. Сперва заметим, что постоянным и замкнутым токам соответствует неподвижный полный заряд системы: действительно, поскольку $\text{div } \mathbf{j} = 0$, то изменение во времени дипольного момента системы

$$\left\langle \sum_{\alpha} e_{\alpha} v_{\alpha}^k \right\rangle = \int d^3\mathbf{r}' j^k(\mathbf{r}') = \int d^3\mathbf{r}' \partial_i (r'^k j^i) = 0,$$

где $j^i = j^i(\mathbf{r}')$. Поэтому при разложении (5.6a) в ряд по малому параметру r'/r нулевой член разложения даёт нуль, а главный не исчезающий вклад производит первый член разложения:

$$A^i(\mathbf{r}) = \frac{n^k}{r^2} \int d^3\mathbf{r}' \frac{j^i r'^k}{c}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (5.7a)$$

Стоящий здесь интеграл есть *магнито-дипольный момент* $\boldsymbol{\mu}$

$$\begin{aligned} \epsilon_{ikl} \mu^l &= \mu^{ik} = \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{r} r^i j^k, \quad \mu^{ik} = -\mu^{ki}, \\ \boldsymbol{\mu} &= \frac{1}{2c} \int d^3\mathbf{r} [\mathbf{r} \times \mathbf{j}] = \frac{1}{2c} \sum_a e_a \langle [\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a] \rangle, \end{aligned} \quad (5.7b)$$

см. определения (8.30). В антисимметричности исходного интеграла в (5.7a) можно убедиться, снова воспользовавшись условием бездивергентности тока $\text{div } \mathbf{j} = 0$:

$$\int d^3\mathbf{r} (r^i j^k + r^k j^i) = \int d^3\mathbf{r} \partial_m (r^i r^k j^m) = 0.$$

В итоге получаем, что вектор-потенциал в калибровке Лоренца, магнитное поле и скалярный потенциал (5.5c) системы токов на далёком от неё расстоянии задаются выражениями

$$\mathbf{A} = \frac{[\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{n}]}{r^2}, \quad \mathbf{B} = \frac{3(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}}{r^3}, \quad \varphi_{B1} = (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}). \quad (5.7c)$$

Выражение для магнитного поля совпадает с полем электрического диполя (5.2f) с точностью до замен $\boldsymbol{\mu} \leftrightarrow \mathbf{d}$, $\mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{E}$, $\varphi_B \leftrightarrow \varphi$.

Если систему имеет смысл представить в виде точечного объекта, то распределение токов в ней следует моделировать *точечным магнитным диполем*. Будучи расположен в начале координат, он имеет распределение токов

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -[\boldsymbol{\mu} \times \nabla] \delta(\mathbf{r}) = \text{rot} (c \boldsymbol{\mu} \delta(\mathbf{r})). \quad (5.7d)$$

Легко убедиться, что магнитный момент (5.7b) такой системы токов равен $\boldsymbol{\mu}$. Для точечного диполя выражения (5.7c) формально применимы во всём пространстве.

5-2.3 Потенциальная энергия системы токов в магнитном поле

Рассмотрим систему постоянных токов, образующую из себя магнитный диполь. Эта система помещена во внешнее слабо неоднородное магнитное поле $\mathbf{B}$, создающееся токами расположенными вдали от исследуемой системы (на расстоянии R) и потому слабо меняющееся на масштабе порядка размера системы $\xi \ll R$. Наша цель – посчитать силу и момент сил, действующую на эту систему токов со стороны поля $\mathbf{B}$. Мы будем также предполагать, что характерное период движения зарядов внутри системы τ мало по сравнению с характерным временем T , $\tau \ll T$, описывающем движение системы как целого.

Из (3.3) следует, что полный лагранжиан рассматриваемой системы представим в виде

$$L = L_0 + L_B, \quad L_B = \frac{1}{c} \sum_a e_a (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_a),$$

где L_0 – лагранжиан системы в отсутствии магнитного поля. Вклад L_B после усреднения по времени может быть переписан в виде потенциальной энергии системы токов во внешнем магнитном поле,

$$L_B = \frac{1}{c} \sum_a e_a \langle (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_a) \rangle = \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{r} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{j}) \quad (5.8a)$$

где $\mathbf{j}$ – ток в исследуемой системе. Вектор-потенциал $\mathbf{A}$ можно в главном приближении считать линейной функцией координат в области расположения рассматриваемой системы токов, представив его в виде $A^i = A^i(0) + r^k \partial_k A^i$ (мы поместили начало координат внутрь системы). В результате придём к тому, что

$$L_B = \frac{\partial_k A^i}{c} \int d^3\mathbf{r} r^k j^i = (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\mu}), \quad (5.8b)$$

см. (5.7b).

Следует, однако, ещё убедиться, что эффективный вклад $-L_B$ (5.8a) в лагранжиан действительно можно понимать как потенциальную энергию системы токов в

магнитном поле. Дело в том, что в левой части уравнения Лагранжа также возникает необходимость произвести усреднение по быстрому движению частиц внутри системы. Выпишем усреднённое уравнение движения системы по времени

$$\frac{d}{dt} \sum_a \left\langle \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \right\rangle = \sum_a \left\langle \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \right\rangle \Rightarrow \quad (5.8c)$$

$$\sum_a \frac{\langle d\mathbf{p}_a \rangle}{dt} + \sum_a \frac{\langle e_a d\mathbf{A}(\mathbf{r}_a) \rangle}{c dt} = \sum_a \left\langle \frac{e_a}{c} \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_a) + e_a \mathbf{E} \right\rangle.$$

Вопрос вызывает второе слагаемое в левой части уравнения движения, именно усреднённый по времени вклад в него от быстрого движения заряда внутри системы. Этот вклад, однако, параметрически мал. Он оценивается как $(\tau/T)\mu B/R$, т.е. содержит дополнительную малость τ/T по сравнению с первым вкладом в правой части, оцениваемым как $\mu B/R$, см. (5.8b). Поэтому уравнение после проведения суммирования по частицам и усреднения по времени приобретает вид

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \text{grad } L_B + \dots \quad (5.8d)$$

где мы воспользовались (5.8b); $\mathbf{P}$ есть полный импульс системы, а многоточием обозначена сила Лоренца (3.15), действующая на систему со стороны электромагнитного поля как на единый заряд. Итак, вклад L_H в лагранжиан действительно можно трактовать как потенциальную энергию системы токов в магнитном поле.

Теперь мы можем провести те же рассуждения, которые были проделаны для электрического диполя, см. Пункт 5-1.5. Сила $\mathbf{F}$ и момент сил $\mathbf{M}$, действующие на систему токов малого размера со стороны внешнего магнитного поля, равны

$$\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathbf{B}, \quad \mathbf{M} = [\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}], \quad (5.8e)$$

по аналогии с (5.4b) и (5.4c).

Операцию усреднения по времени можно производить на любом этапе решения задачи. В Пункте 5-2.5.1 усреднение произведено над силой Лоренца (3.15), в результате чего, как и должно быть, получаются те же выражения (5.8e).

5-2.4 Теорема Лармора

Рассмотрим систему зарядов, в которой все заряды имеют одинаковое отношение заряда к массе e_α/m_α . Скорость зарядов в системе предполагаются нерелятивистскими. Для такой системы вектор магнитодипольного момента (5.7b) пропорционален вектору механического момента $\mathbf{L}$ (2.9a): поскольку электрический ток $\mathbf{j} = (e/m)\vec{p}$, то

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2mc} \mathbf{L}. \quad (5.9a)$$

Коэффициент пропорциональности $e/(2mc)$ называется *гиромангнитным отношением*.

Пусть теперь эта система зарядов помещена в однородное магнитное поле $\mathbf{B}$. Тогда на неё действует момент сил $\mathbf{M}$ согласно (5.8e), так что движение системы как целого описывается уравнением

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{eB}{2mc} [\mathbf{L} \times \mathbf{b}], \quad (5.9b)$$

где единичный вектор $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ направлен вдоль магнитного поля. Уравнение (5.9b) описывает прецессию момента с угловой частотой

$$\boldsymbol{\omega}_B = -\frac{eB}{2mc} \mathbf{b}. \quad (5.9c)$$

В заключении (5.9c) состоит *теорема Лармора*: если все заряды в системе имеют одинаковое отношение заряда к массе e_α/m_α , то при наложении на систему однородного магнитного поля $\mathbf{B}$, она прецессирует с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_B$. Иными словами, система зарядов будучи помещённой в магнитное поле $\mathbf{B}$, движется так, как если бы она находилась во системе координат, вращающейся с угловой скоростью $-\boldsymbol{\omega}_B$. Теорема Лармора является приближённым равенством, условием её применимости является медленность прецессии: частота прецессии должна быть малой по сравнению с частотой нерелятивистского квази-периодического движения зарядов в системе.

Полезно доказать теорему Лармора без перехода к уравнениям движения, используя непосредственно только выражения для функций Лагранжа. Пусть в инерциальной системе координат K скорость частицы № α равна $\mathbf{v}_\alpha$. Тогда в (неинерциальной) системе координат K^Ω , вращающейся с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$ относительно начала координат, скорость частицы оказывается равной

$$\mathbf{v}_\alpha \rightarrow \mathbf{v}_\alpha - [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_\alpha].$$

Лагранжиан системы зарядов во вращающейся системе координат

$$L_\Omega = \sum_\alpha \frac{m_\alpha (\mathbf{v}_\alpha - [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_\alpha])^2}{2} - U,$$

где U — потенциальная энергия частиц. Если действие сил инерции относительно слабо, $|[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]| \ll v_\alpha$, то этот лагранжиан можно разложить до первого порядка по скорости вращения,

$$L_\Omega \approx \sum_\alpha \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} - \sum_\alpha m_\alpha (\mathbf{v}_\alpha \cdot [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_\alpha]) - U. \quad (5.9d)$$

С другой стороны, вернёмся в инерциальную систему координат и включим однородное магнитное поле $\mathbf{B}$. При записи лагранжиана (3.3) в нерелятивистском пределе выберем калибровку $\mathbf{A} = [\mathbf{B} \times \mathbf{r}]/2$:

$$L_B = \sum_\alpha \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_\alpha e_\alpha (\mathbf{v}_\alpha \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{r}]) - U \quad (5.9e)$$

Сравнивая (5.9d, 5.9e) приходим к выводу, что если отношение заряда к массе e_α/m_α у всех частиц одинаково, то движение в магнитном поле становится идентичным движению в отсутствии магнитного поля, но во вращающейся системе координат с угловой скоростью (5.9c).

5-2.5 Задачи

• **Задача 1:** Используя выражения для Максвелловского тензора напряжений, найдите поверхностную силу, действующую на обмотку катушки индуктивности. Длина катушки L , её радиус a , количество витков N , сила тока I .

5-2.5.1 Сила и момент сил, действующие на магнитный диполь со стороны внешнего магнитного поля

Сила Лоренца $\mathbf{F}$, действующая на диполь, возникает только если магнитное поле имеет неоднородность в пространстве. Действительно, вклад в силу $\mathbf{F}$, происходящий от однородной части магнитного поля, равен нулю, поскольку интеграл по пространству от плотности тока $\mathbf{j}$ для статической системы токов равен нулю. Тогда учтём в магнитном поле изменение в пространстве в главном приближении, положив

$$B^l(\mathbf{r}) = B^l + r^m \partial_m B^l + \dots,$$

где в правой части равенства магнитное поле B^l и его градиент $\partial_m B^l$ должны браться в точке, находящейся внутри системы токов, от этой же точки должен отсчитываться радиус-вектор $\mathbf{r}$. Теперь получаем для компонент полной силы Лоренца (3.15), действующей на всю систему

$$\begin{aligned} F^i &= \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{r} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]^i = \epsilon^{ikl} \partial_m B^l \int d^3\mathbf{r} \frac{j^k r^m}{c} = \\ &= \partial_i (\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) B^i, \end{aligned} \quad (5.10)$$

где мы воспользовались выкладками уравнения (5.7b), уравнением Максвелла $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, а затем равенством

$$0 = [\boldsymbol{\mu} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}] = \operatorname{grad}(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) - (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathbf{B},$$

основывающемся на уравнении Максвелла $\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0$. Видно соответствие между выражениями для сил, действующих на магнитный и электрический диполи, см. (5.10) и (5.4b).

Момент сил $\mathbf{K}$, действующий на магнитный диполь, происходит от однородной части магнитного поля,

$$\begin{aligned} K^i &= \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{r} [\mathbf{r} \times [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]]^i = B^k \int d^3\mathbf{r} \frac{r^k j^i}{c} = \\ &= \epsilon_{kil} \mu^l B^k = [\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}]^i. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Раскрывая двойное векторное произведение мы воспользовались тем, что одно из них равно нулю вследствие антисимметричности тензора μ^{ik} (5.7b).

5-2.6 Постоянные электрическое и магнитное поля

• **Задача 2:** Вдоль прямого длинного равномерно заряженного провода с погонной плотностью заряда ϱ течёт ток I . Найти систему координат K' , в которой есть только магнитное или только электрическое поле. При каком соотношении ϱ и I это сделать невозможно? Найдите поле в системе координат K' (в случаях, когда она существует).

• **Задача 3:** По плоскости, равномерно заряженной с поверхностной плотностью заряда ϱ , течёт однородный поверхностный ток $\mathbf{i}$. Найти систему координат K' , в которой есть только магнитное или только электрическое поле. При каком соотношении ϱ и $|\mathbf{i}|$ это сделать невозможно? Найдите поле в системе координат K' (в случаях, когда она существует).

Глава 6

ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ЗАРЯДАМИ

1	Поле движущегося точечного заряда.....	77
1.	Потенциалы Лиенара-Вихерта.....	77
2.	Электрическое и магнитное поля.....	78
3.	Поле равномерно движущегося заряда.....	79
4.	Задачи.....	79
2	Функции Грина волнового уравнения.....	80
1.	Запаздывающая функция Грина.....	80
2.	Опережающая и другие функции Грина.....	82
3.	Тензорная функция Грина.....	82
4.	Двумерное электрическое поле.....	82
3	Дипольное излучение.....	83
1.	Поле электрического диполя.....	83
2.	Задачи.....	85
4	Магнито-дипольное и квадрупольное излучение.....	86
1.	Поле излучения как асимптотика на больших расстояниях.....	87
2.	Задачи.....	87
5	Торможение излучением.....	89
1.	Скорость производства электромагнитной энергии уходящих волн.....	89
2.	Торможение излучением.....	89
3.	Задачи.....	90

§6.1. Поле движущегося точечного заряда

Запаздывающие потенциалы (4.10) имеют дело с непрерывной средой. Часто бывает удобным оперировать в терминах точечных зарядов. Выражения для 4-потенциала при известных траекториях движения заряженных частиц в калибровке Лоренца называются *потенциалами Лиенара-Вихерта* (*Liénard-Wiechert potential*).

6-1.1 Потенциалы Лиенара-Вихерта

Для простоты будем рассматривать одну частицу и обозначим её траекторию (мировую линию) $z(s)$. В трёхмерном виде траектория частицы задаётся законом $\mathbf{z}(t)$, а её скорость равна $\mathbf{v}(t)$. Поскольку частица движется со скоростью, меньшей скорости света, то сигнал в момент и точку наблюдения $\|x^\mu\| = \{ct, \mathbf{r}\}$ доходит только от одного участка траектории частицы. Иными словами, уравнение

$$t = t_r + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{z}(t_r)|}{c}, \quad T = t - t_r. \quad (6.1)$$

имеет ровно одно решение относительно момента t_r . Мы ввели время распространения сигнала T . Пусть моменту испускания сигнала t_r соответствует положение на мировой линии $s = s_r$. Определим 4-вектор R^μ , соединяющий точку испускания сигнала с точкой его приёма:

$$\|R^\mu(x)\| = \|x^\mu - z^\mu(s_r)\| = \{cT, \mathbf{R}\}, \quad R_\mu R^\mu = 0. \quad (6.2)$$

Последнее равенство выражает то, что сигнал распространяется со скоростью света.

6-1.1.1 Получение потенциалов Лиенара-Вихерта через условие ковариантности

Потенциалы Лиенара-Вихерта быстрее всего получить из требования лоренцевской инвариантности всех математических формул, описывающих физические соотношения.

Перейдём в систему координат K' , в которой заряд в момент испускания s_r покоился. Выражение для запаздывающих потенциалов (4.10) показывает, 4-потенциал зависит только от скорости частиц и их положения, но не от их ускорения. Поэтому потенциал в событии x'^μ может быть вычислен как статический потенциал заряда (см. Пункт 5-1.1):

$$\|A'^\mu\| = \left\{ \frac{e}{R'}, \vec{0} \right\} \quad \Leftrightarrow \quad A^\mu = \frac{eu^\mu}{R^\nu u_\nu}. \quad (6.3)$$

Вторым равенством мы переписали результат в (единственно возможной) ковариантной форме. Дело в том, что поскольку A'^μ является контравариантным вектором, то и справа должен стоять также контравариантный вектор для того, чтобы это равенство было верно в любой системе координат. В рамках условия задачи в нашем распоряжении есть два 4-вектора – скорость

заряда u^μ и вектор от источника до приёмника R^μ ; в специально выбранной системе координат K' 4-вектор скорости как раз равен $\|u'^\mu\| = \{1, \vec{0}\}$.

В трёх-мерном виде получаем следующие выражения для потенциалов:

$$\Phi(t, \mathbf{r}) = \frac{e}{(\mathbf{R}_v \cdot \mathbf{n})}, \quad \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{e\mathbf{v}/c}{(\mathbf{R}_v \cdot \mathbf{n})}, \quad (6.4)$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{z}(t_r)$, единичный вектор $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$, и

$$\mathbf{R}_v = \mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c}R, \quad (\mathbf{R}_v \cdot \mathbf{n}) = \frac{R^\nu u_\nu}{\gamma} = R \left(1 - \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})}{c}\right).$$

6-1.1.2 Получение потенциалов Лиенара-Вихерта непосредственно из выражений для запаздывающих потенциалов

Воспользуемся формулой (1.9b), связывающей 4-ток с мировой линией заряда, а также ковариантными выражениями для функции Грина (4.9) и запаздывающих потенциалов (4.10). После интегрирования по пространству-времени и тем самым снятия 4-х мерной δ -функции, получим, что запаздывающие потенциалы переписываются в виде интеграла по мировой линии заряда

$$A^\mu(x) = 2e \int ds \theta(X^0) \delta(X_\mu X^\mu) u^\mu(s), \quad (6.5)$$

$$X^\mu(s) = x^\mu - z^\mu(s), \quad X^\mu(s_r) \equiv R^\mu(x).$$

Чтобы интегрированием по ds снять δ -функцию в (6.5), воспользуемся тем, что

$$\theta(X^0) \left| \frac{d}{ds} X_\nu X^\nu \right| \delta(X_\mu X^\mu) = \delta(s - s_r),$$

$$\frac{d}{ds} X_\nu X^\nu = -2X^\nu u_\nu.$$

Таким образом, потенциалы Лиенара-Вихерта суть:

$$A^\mu(x) = 2e \int ds \frac{\delta(s - s_r)}{|2X^\nu u_\nu|} u^\mu(s) = \frac{e u^\mu}{u_\nu R^\nu},$$

где в последнем равенстве 4-скорость заряда u также берётся при $s = s_r$. Полученное выражение совпадает с (6.3).

6-1.2 Электрическое и магнитное поля

По результату (6.4) вычислим интересные с физической точки зрения электрическое и магнитное поля. Для того, чтобы это сделать, нужно уметь вычислять производную от момента испускания сигнала s_r по положению приёмника x . Дифференцируя скалярное равенство в (6.2), получаем

$$0 = \frac{\partial(R_\nu R^\nu)}{\partial x^\mu} = 2R_\nu \left(\delta_\mu^\nu - \frac{\partial s_r}{\partial x^\mu} \frac{dz^\nu}{ds_r} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial s_r}{\partial x^\mu} = \frac{R_\mu}{R_\nu u^\nu}.$$

Также нам понадобятся соотношения

$$\frac{\partial(R_\sigma u^\sigma)}{\partial x^\mu} = u_\mu + \frac{R_\mu}{R_\sigma u^\sigma} \frac{\partial(R_\lambda u^\lambda)}{\partial s_r} = u_\mu + \frac{R_\mu(R_\lambda w^\lambda - 1)}{R_\sigma u^\sigma}$$

Теперь можно воспользоваться (3.10) для вычисления тензора электромагнитного поля по выражению (6.3) для 4-потенциала:

$$F_{\mu\nu} = \frac{R_\mu u_\nu - R_\nu u_\mu}{(R_\sigma u^\sigma)^3} + \frac{R_\mu w_\nu - R_\nu w_\mu}{(R_\sigma u^\sigma)^2} - \frac{(R_\mu u_\nu - R_\nu u_\mu) R_\lambda w^\lambda}{(R_\sigma u^\sigma)^3}. \quad (6.6)$$

В трёх-мерных обозначениях с учётом выражения для 4-ускорения (1.7g) равенство (6.6) переписывается в виде

$$\mathbf{E} = \frac{e \mathbf{R}_v}{\gamma^2 (\mathbf{R}_v \cdot \mathbf{n})^3} + \frac{e [\mathbf{R} \times [\mathbf{R}_v \times \mathbf{a}]]}{c^2 (\mathbf{R}_v \cdot \mathbf{n})^3}, \quad (6.7)$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}],$$

где $\mathbf{a}$ – ускорение частицы в момент t_r . Отметим, что магнитное и электрические поля ортогональны друг другу.

В (6.7) первое слагаемое в выражении для $\mathbf{E}$ соответствует статическому полю; это слагаемое остаётся единственным, если заряд движется равномерно и прямолинейно. В соответствии с законом Кулона, при удалении от источника оно убывает обратно пропорционально квадрату расстояния. Для движущегося заряда, однако, распределение поля уже становится не изотропным в пространстве.

Второе слагаемое в (6.7) появляется только тогда, когда заряд движется с ускорением. При удалении от источника интенсивность этой части поля убывает медленнее, обратно пропорционально расстоянию. Такое убывание соответствует сферической волне, уходящей от источника. Действительно, этот вклад в электрическое поле ортогонален направлению $\mathbf{n}$ от источника, как и должно быть для плоских волн (4.25).

6-1.2.1 Излучение релятивистски движущегося заряда

Проанализируем структуру поля излучения (6.7) в ультрарелятивистском пределе $\gamma \gg 1$. В знаменателе множитель

$$(\mathbf{R}_v \cdot \mathbf{n}) = R \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right) \rightarrow \frac{R}{2\gamma^2} (\gamma^2 \theta^2 + 1),$$

где θ – угол между скоростью частицы $\mathbf{v}$ и направлением наблюдения $\mathbf{n}$; мы сделали разложение по малому параметру $1/\gamma$ при малых углах $\theta \ll 1$. Из этого

6-1.4 Задачи

• **Задача 1:** Релятивистская частица с зарядом e и массой m , двигаясь прямолинейно, тормозится от скорости v_0 до нуля за время τ (по лабораторным часам), при этом её ускорение меняется линейно по лабораторным часам, будучи равным нулю в начале процесса торможения. Какую длительность Δt импульса излучения будет измерять удалённый наблюдатель, находящийся под углом θ к направлению движения частицы?

• **Задача 2:** Релятивистская частица с зарядом e и массой m , двигаясь прямолинейно, тормозится от скорости v_0 до нуля за время τ (по лабораторным часам),

при этом её ускорение меняется линейно по лабораторным часам, будучи равным нулю в конце процесса торможения. Какую длительность Δt импульса излучения будет измерять удалённый наблюдатель, находящийся под углом θ к направлению движения частицы?

• **Задача 3:** Релятивистская частица с зарядом e и массой m , двигаясь прямолинейно, тормозится от скорости v_0 до нуля за время τ (по лабораторным часам $-\tau < t_r < 0$, t_r — момент испускания сигнала), при этом её скорость меняется по закону $v = -v_0 \sin(\pi t_r / (2\tau))$. Какую длительность Δt импульса излучения будет измерять удалённый наблюдатель, находящийся под углом θ к направлению движения частицы?

§6.2. Функции Грина волнового уравнения

Рассмотрим неоднородное волновое уравнение (4.7) — уравнение на 4-потенциал в калибровке Лоренца. Это уравнение описывает возбуждение электромагнитного поля зарядами. Вид всех компонент этого уравнения эквивалентен, поэтому возьмём, пример, его 0-ю компоненту:

$$\square \varphi \equiv \left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta \right) \varphi = 4\pi \rho.$$

где $\rho = \rho(t, \mathbf{r})$ — некоторая функция координат и времени. Если мы знаем решение уравнения

$$\left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta \right) G(t, \mathbf{r}) = 4\pi \delta(t) \delta^{(3)}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c} \delta^{(4)}(x), \quad (6.12a)$$

где $\|x^\mu\| = \{ct, \mathbf{r}\}$, то решением уравнения на потенциал φ в общем случае является

$$\varphi(t, \mathbf{r}) = \int G(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') dt d^3\mathbf{r}' \rho(t', \mathbf{r}'). \quad (6.12b)$$

Функция G называется *функцией Грина* (в данном случае — *функцией Грина волнового уравнения*).

Оператор д'Аламбера $\square$ в (6.12a) не зависит от координат. Поэтому имеет смысл совершить Фурье-преобразование над обеими частями (6.12a), где этот оператор должен иметь диагональный вид. В результате приходим к уравнению

$$(k^2 - \omega^2/c^2) G(\omega, \mathbf{k}) = 4\pi, \quad (6.12c)$$

$$G(t, \mathbf{r}) = \int (d\omega)(d^3\mathbf{k}) G(\omega, \mathbf{k}) e^{-ik_\mu x^\mu}$$

где 4-х мерный волновой вектор $\|k^\mu\| = \{\omega/c, \mathbf{k}\}$. Проблема однако в том, что непосредственно написанного в (6.12c) не хватает для того, чтобы найти функцию Грина $G(t, \mathbf{r})$, поскольку в подынтегральном выражении в обратном преобразовании Фурье (6.12c) множитель $G(\omega, \mathbf{k})$ имеет полюса при $\omega = \pm ck$, обращаясь в

нём в бесконечность. Это не удивительно, поскольку, как мы знаем, существует множество нетривиальных решений однородного волнового уравнения, описывающих распространение плоских волн, см. § 3.

Для того, чтобы обратное преобразование Фурье стало полностью определённым, с математической точки зрения следует доопределить правило обхода полюсов у $G(\omega, \mathbf{k})$, т.е. сделать так, чтобы полюса сместились с действительной оси в комплексную плоскость переменной ω . Если выбран некоторый определённый способ обхода, то переход к другому способу означает изменение функции Грина вида

$$G_{\text{new}} = G_{\text{old}} + \frac{2}{c^2} F(\omega, \mathbf{k}) \delta(k^2 - \omega^2/c^2), \quad (6.12d)$$

где функция $F(\omega, \mathbf{k})$ не имеет сингулярности, когда $k^2 - \omega^2/c^2 = 0$. Действительно, второе слагаемое в правой части (6.12d) не изменяет левую часть уравнения на функцию Грина (6.12c), то есть произвол в выборе второго слагаемого в (6.12d) обусловлен неоднозначностью процедуры обращения оператора д'Аламбера.

Переход (6.12d) от одной функции Грина к другой может быть легко интерпретирован, будучи переписанным в координатном представлении:

$$G_{\text{new}}(t, \mathbf{r}) = G_{\text{old}}(t, \mathbf{r}) + \int (d^3\mathbf{k}) \frac{F(\omega, \mathbf{k}) e^{-i\omega t} + F(-\omega, \mathbf{k}) e^{i\omega t}}{\omega} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (6.12e)$$

где частота определяется дисперсионным соотношением $\omega = +c|\mathbf{k}|$. Таким образом, преобразование (6.12e) сводится к добавлению к функции Грина набора плоских волн с коэффициентами $F(\omega, \mathbf{k})$. Поскольку плоские волны удовлетворяют однородному волновому уравнению, то эта добавка не нарушает равенства (6.12a), являющегося определением функции Грина.

6-2.1 Запаздывающая функция Грина

Правила обхода полюсов в (6.12c) может быть выбрано исходя из физических соображений. Потребуем, чтобы ‘отклик’ $\varphi(t)$ в (6.12b) мог бы быть отличен от нуля только в том случае, если ‘источник’ $\rho(t')$ имеет ненулевую амплитуду при $t' \leq t$. Удовлетворяющая этому требованию *причинности* функция Грина называется *запаздывающей функцией Грина* (*retarded Green function*). В Фурье-представлении запаздывающая Функция Грина равна

$$G(\omega, \mathbf{k}) = \frac{4\pi}{k^2 - (\omega/c + i0)^2} = -\frac{4\pi}{k_\mu k^\mu}. \quad (6.12f)$$

Добавка ‘ $i0$ ’ задаёт правила обхода полюсов, соответственно $\|k^\mu\| = \{\omega/c + i0, \mathbf{k}\}$.

Проверим, что именно правило полюсов (6.12f) соответствует причинности, т.е. тому, что при $t < 0$ функция Грина G тождественно равна нулю. Для этого рассмотрим обратное Фурье-преобразование от частотно-волнового представления к временно-волновому представлению:

$$G(t, \mathbf{k}) = \int \frac{4\pi e^{-i\omega t} (d\omega)}{k^2 - (\omega/c + i0)^2} \quad (6.12g)$$

Контур интегрирования и положения полюсов подынтегрального выражения (6.12g) показаны на Рис. 6.2а. Когда время отрицательно, $t < 0$, то контур интегрирования следует уводить вверх на комплексной плоскости ω , поскольку в этом случае экспонента в подынтегральном выражении становится малой. На пути такой деформации контур не встречает полюсов, поэтому полный интеграл равен нулю.

В обратном случае, когда $t > 0$, экспонента в подынтегральном выражении (6.12g) стремится к нулю при большой отрицательной мнимой части частоты ω , поэтому контур интегрирования надо уводить в нижнюю полуплоскость комплексной плоскости ω . На пути этой деформации встречаются два полюса подынтегрального выражения, в результате чего возникает ненулевой результат интегрирования:

$$G(t, \mathbf{k}) = \frac{4\pi \theta(t)}{k} \sin(ckt). \quad (6.12h)$$

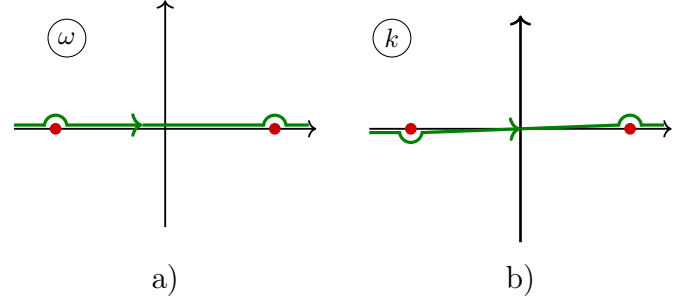


Рис. 6.2 Комплексная структура запаздывающей функции Грина (6.12f). Красными жирными точками обозначены положения полюсов подынтегрального выражения, зелёной линией — контура, вдоль которых производится интегрирование. а) Расположение полюсов при интегрировании по частоте, (6.12g); б) положение полюсов при интегрировании по абсолютному значению волнового вектора k , для примера взят случай $\omega < 0$.

Найдём теперь функцию Грина в частотно-координатном представлении функция Грина. Для этого при проведении обратного Фурье-преобразования от волнового вектора $\mathbf{k}$ к радиус-вектору $\mathbf{r}$ в интегрировании по $\mathbf{k}$ перейдём к сферическим координатам $\{k, \vartheta, \varphi\}$, направив $\mathbf{r}$ вдоль оси Oz :

$$\begin{aligned} G(\omega, \mathbf{r}) &= \int_0^\infty \frac{4\pi k^2 dk / (2\pi)^3}{k^2 - (\omega + i0)^2} \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta e^{ikr \cos \vartheta} \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{1}{r} \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{\pi i} \frac{k \exp(ikr)}{k^2 - (\omega + i0)^2} \end{aligned}$$

Первым делом мы взяли интегралы по углам, воспользовавшись тем, что $\sin \vartheta d\vartheta = -d \cos \vartheta$. Далее, получившийся интеграл по абсолютному значению k на луче $(0, +\infty)$ мы сначала распространили на всю прямую, воспользовавшись тем, что подынтегральное выражение чётно по k ; затем к подынтегральному выражению мы добавили нечётную функцию, пропорциональную $\cos(kr)$, не изменив таким образом значения интеграла. Комплексная структура интеграла по k показана на Рисунке 6.2б). После проведения интегрирования приходим к

$$G(\omega, \mathbf{r}) \equiv \int (d^3\mathbf{k}) G(\omega, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \frac{\exp(i(\omega/c)r)}{r}. \quad (6.12i)$$

6-2.1.1 Функция Грина во временно-координатном представлении

Теперь найдём запаздывающую функцию Грина в временно-координатном представлении, воспользовавшись (6.12i):

$$G(t, \mathbf{r}) = \int (d\omega) G(\omega, \mathbf{r}) e^{-i\omega t} = \frac{\delta(t - r/c)}{r}. \quad (6.12j)$$

Это выражение можно переписать также в ковариантном виде:

$$G(x) = 2c\theta(x^0)\delta(x_\mu x^\mu) \quad (6.12k)$$

Запаздывающую функцию Грина $G(t, \mathbf{r})$ легко найти и непосредственно решая волновое уравнение. Поскольку она имеет сферически-симметричную зависимость от координаты $\mathbf{r}$, то уравнение (6.12a) при $r > 0$ упрощается до

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \frac{1}{r}\partial_r^2 r\right)G(t, r) = 0. \quad (6.12l)$$

Если теперь мы скажем, что это уравнение на функцию $rG(t, r)$, то по форме оно совпадёт с уравнением распространения плоской волны (4.23). Таким образом, уходящая от центра волна, возбуждённая в момент времени $t = 0$ в начале координат согласно правой части (6.12a), описывается решением

$$G(t, r) \propto \frac{\delta(r - ct)}{r}.$$

Коэффициент пропорциональности может быть найден из установления соответствия между волновой задачей и статической задачей Кулона. Для этого проинтегрируем (6.12a) по времени. В результате получим уравнение на $\int dt G(t, \mathbf{r})$, совпадающее с (5.1b): то есть,

$$\int dt G(t, \mathbf{r}) = G_c(\mathbf{r}).$$

В результате приходим к (6.12j).

6-2.2 Опережающая и другие функции Грина

Для того, чтобы отличать разные функции Грина, обозначим запаздывающую функцию Грина, введённую в Пункте 6-2.1, через G_R .

Функция времени и координат

$$\begin{aligned} G_R - G_A &\equiv \frac{\delta(t - r/c) - \delta(t + r/c)}{r} = \\ &= 2c \operatorname{sign}(x^0) \delta(x_\mu x^\mu). \end{aligned}$$

удовлетворяет однородному волновому уравнению, сравни с (6.12k). Поэтому определённая так функция

$$G_A(t, \mathbf{r}) = \frac{\delta(t + r/c)}{r} \quad (6.12m)$$

удовлетворяет уравнению (6.12a). Она не равна нулю только при $t < 0$, поэтому называется *опережающей функцией Грина* (*advanced Green function*).

В Фурье-представлении разность запаздывающей и опережающей функций Грина равна

$$G_R(\omega, \mathbf{k}) - G_A(\omega, \mathbf{k}) = 8\pi^2 i \operatorname{sign}(\omega) \delta(k_\mu k^\mu),$$

что согласуется с общими рассуждениями (6.12d).

6-2.3 Тензорная функция Грина

Запишем функцию Грина для электрического поля. Волновое уравнение на электрическое поле в координатно-частотном представлении имеет вид

$$\left(\operatorname{rot} \operatorname{rot} - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \mathbf{E} = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \mathbf{j}. \quad (6.13)$$

Решение для электрического поля можно получить не прямым путём, а пользуясь уже полученным решением для 4-потенциала в Лоренцевой калибровке (ответ для электрического поля, естественно, не должен зависеть от выбранной калибровки). В результате получаем для запаздывающей функции Грина:

$$E^i(\mathbf{r}) = \int G_\omega^{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3 r' j^j, \quad (6.14)$$

$$G_\omega^{ij}(\mathbf{r}) = i\omega \left(\delta^{ij} + \frac{c^2}{\omega^2} \partial_i \partial_j \right) \frac{\exp(i\omega r/c)}{r}$$

В частотно-волновом представлении

$$G_{\omega, \mathbf{k}}^{ij} = \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{\omega^2/c^2} \right) \frac{i\omega/c}{k^2 - (\omega/c + i0)^2}.$$

В англоязычной литературе функции Грина типа (6.14) называются *diadic Green's function*, в отличие от скалярной функции Грина (6.12f).

• **Задача 1:** Покажите, что из решения (6.14) следует уравнение Максвелла $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$.

• **Задача 2:** Покажите, что на далёких расстояниях $r \rightarrow \infty$ тензорная функция Грина удовлетворяет излучательному условию

$$\epsilon^{ijk} \left(r \partial_j - ikr^j \right) G_\omega^{kl}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 0. \quad (6.15)$$

• **Задача 3:** Рассмотрите электростатический предел $\omega \rightarrow 0$. Выразив ток через вектор поляризации, $\mathbf{j} = -i\omega \mathbf{P}$, покажите, что решение (6.14) даёт закон Кулона с объёмной плотностью заряда $\rho = -\operatorname{div} \mathbf{P}$.

6-2.4 Двумерное электрическое поле

Рассмотрим ситуацию, когда по оси z соблюдается полная однородность распределения зарядов, и, кроме того, электрический ток имеет только x, y -компоненты. В таком случае магнитное поле $\mathbf{B}$ имеет только z -компоненту B , а электрическое поле $\mathbf{E}$ имеет только x, y -компоненты.

Функцию Грина удобно искать в частотно-координатном пространстве. Уравнение на магнитное поле

$$(\Delta^\perp + \omega^2/c^2)H = -4\pi \operatorname{rot} \mathbf{j},$$

где $\mathbf{r} = \{x, y\}$, $\operatorname{rot} \mathbf{j} = \partial_y j^x - \partial_x j^y$, имеет решение

$$H(\mathbf{r}) = \int G^\perp(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^2 r' \operatorname{rot} \mathbf{j}(\mathbf{r}')$$

Функция Грина $G^\perp(\mathbf{r})$ зависит только от абсолютного значения r и удовлетворяет уравнению

$$\left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{\omega^2}{c^2}\right)G^\perp(\mathbf{r}) = 4\pi\delta^\perp(\mathbf{r})$$

Это — модифицированное уравнение Бесселя нулевого порядка. Запаздывающим решением является функция Ганкеля первого рода нулевого порядка,

$$G^\perp(\mathbf{r}) = -\pi i H_0^{(1)}(\omega r/c) \quad (6.16)$$

Электрическое поле

$$\begin{aligned} E^\alpha &= \frac{i}{\omega} (\epsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta B - 4\pi j^\alpha) = \\ &= \int G^{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3r' j^\beta(\mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$G^{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = -\pi\omega \left(\delta^{\alpha\beta} + \frac{c^2}{\omega^2} \partial_\alpha \partial_\beta \right) H_0^{(1)}(\omega r/c),$$

сравни с (6.14).

§6.3. Дипольное излучение

В § 1 была построена аппроксимация электрического поля, создаваемого локализованной системой статических зарядов на далёком от неё расстоянии. Затем в § 2 была рассмотрена система стационарных токов; исследовалось магнитное поле, которое она создаёт на далёких расстояниях.

Рассмотрим теперь систему движущихся нерелятивистских зарядов и выясним, какое электромагнитное поле эта система создаёт вокруг себя. Пусть характерный размер системы равен a , а характерная скорость зарядов в ней равна v . Мы интересуемся полем, которое создают эти заряды на расстояниях r , больших по сравнению с размером системы a .

На близких расстояниях до системы распределение электрического поля может быть приближено через мультипольное разложение, описанное в § 1. Это описание годится, пока время распространения сигнала от системы до точки наблюдения r/c (где r — расстояние от системы до наблюдателя) мало по сравнению с временем существенного изменения распределения зарядов внутри системы, которое может быть оценено как a/v . Эта область расстояний называется *ближней зоной* (*near-field region*). На этих же расстояниях магнитное поле возможно вычислить через уравнения магнитостатики, как это было проделано в § 2. Однако на больших расстояниях, когда $r \gg ca/v$, статические выражения для электромагнитного поля становятся неприменимыми. Действительно, распределение зарядов и токов успеет заметно измениться, пока сигнал дойдёт от системы до точки наблюдения. Эта область называется *волновой или дальней зоной* (*far field region*). Итак,

$$\text{ближняя зона:} \quad r \ll \frac{c}{v}a, \quad (r \gg a),$$

$$\text{волновая (дальняя) зона:} \quad r \gg \frac{c}{v}a \quad (6.18a)$$

В волновой зоне электромагнитное поле сильно отличается от того, которое предсказывает статическая теория. Оно определяется уходящими электромагнитными волнами, которые излучает система неравномерно движущихся зарядов.

Как и в §§ 1,2, построение теории производится путём разложения электромагнитного поля по малому отношению a/r . Ниже мы увидим, что этот параметр работает в ближней зоне, тогда как в волновой зоне это разложение переходит в разложение по малому параметру $v/c \ll 1$. Таким образом, для возможности построения теории заряды должны двигаться с нерелятивистскими скоростями, $v/c \ll 1$. Целью этого параграфа является исследование радиационных эффектов в наинизших порядках по отношению v/c . Будут проанализированы электро-дипольный, магнито-дипольный и квадрупольный вклады в излучение.

Процедуру разложения по малому размеру системы (или по малой скорости внутри системы, которая также пропорциональна размеру системы) надо применять к общему выражению (4.10) для запаздывающих потенциалов

$$A^\mu(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{r}' \frac{j^\mu(t_r, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad t_r = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}.$$

Нам выше уже выписано разложение (5.2c) для обратного расстояния $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, для дальнейших вычислений будет полезным выписать также разложение и для значения 4-тока j^μ в прошлом:

$$\begin{aligned} j^\mu(t_r, \mathbf{r}') &= \left(1 + \left(\frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')}{c} + \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')^2 - r'^2}{2cr} \right) \partial_t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')^2}{2c^2} \partial_t^2 + \dots \right) j^\mu(t_R, \mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (6.18b)$$

где $t_R = t - r/c$ — время распространения сигнала от центра системы до наблюдателя, а $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ — единичный вектор направленный от системы (источника) к точке наблюдения.

6-3.1 Поле электрического диполя

Выделим теперь в (4.10) слагаемые, пропорциональные дипольному моменту (5.2d), используя выписанные раз-

ложения по координате смещения внутри системы зарядов., Вектор-потенциал в калибровке Лоренца имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial_t}{c} \right) \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d})}{r}, \quad \mathbf{d} = \mathbf{d}(t_R), \quad (6.19a)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\dot{\mathbf{d}}}{r}, \quad \dot{\mathbf{d}} = \partial_t \mathbf{d} = \int d^3 r' \mathbf{j}(t_R, \mathbf{r}')$$

Определение дипольного момента $\mathbf{d}$ совпадает с уже полученным определением (5.2d) в статике. Первый вклад в скалярный потенциал φ соответствует потенциалу статического диполя (5.2a, 5.2d); остальные вклады в 4-потенциал возникают, если диполь изменяется во времени. В действительности в разложении (4.10) мы удержали члены первого порядка малости по малым безразмерным параметрам

$$\frac{a}{r} \ll 1, \quad \text{и} \quad \frac{a \partial_t}{c} \sim \frac{v}{c} \ll 1. \quad (6.19b)$$

Отсюда видно, что для возможности проведения разложения требуется в том числе условие медленности движения зарядов, $v \ll c$.

Используем теперь (6.19a) для получения выражения для электромагнитного поля. Электрическое поле (напомним, что при дифференцировании по координате надо дифференцировать в том числе и $\mathbf{d}(t_R)$ как сложную функцию)

$$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{d}}{r^3} + \frac{3(\dot{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \dot{\mathbf{d}}}{cr^2} + \frac{[\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}]]}{c^2 r}. \quad (6.19c)$$

Первое слагаемое в этой сумме есть поле статического диполя, см. (5.2f). Именно этот вклад оказывается ведущим в ближней зоне. В выражении для магнитного поля (поскольку диполь в нашем рассмотрении уже точечный объект, то можно пользоваться выражением $\mathbf{B} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]$ (6.7), связывающим магнитное с электрическим полем)

$$\mathbf{B} = -\frac{[\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{d}}]}{cr^2} - \frac{[\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}]}{c^2 r} \quad (6.19d)$$

первое слагаемое — поле (элемента) постоянного тока, и, соответственно, совпадает выражением Био-Савара-Лапласа (5.6c). В ближней зоне этот вклад является доминирующим.

6-3.1.1 Излучение

В волновой зоне ведущими в выражениях для электромагнитного поля (6.19c, 6.19d) оказываются последние слагаемые в правых частях. Соотношение между электрическим и магнитными полями соответствует плоской волне (4.25), распространяющейся в направлении от источника. Амплитуда этих вкладов убывает обратно пропорционально расстоянию до источника, а временная зависимость входит через $t_R = t - r/c$. Таким образом,

в волновой зоне электромагнитное поле представляет из себя расходящуюся волну (??). Угловая симметрия волны определяется типом излучения, в данном случае электро-дипольным.

Проведём вычисления. Плотность потока энергии, связанного с уходящими от источника волнами (вектор Пойтинга (4.21b)) в волновой зоне

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] = \frac{[\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}]^2}{4\pi c^3 r^2} \mathbf{n}, \quad (6.19e)$$

$$\frac{dI_d}{do} = r^2 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) = \frac{(\ddot{\mathbf{d}}(t_R))^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta,$$

где dI_d — интенсивность излучения, уходящая в элемент телесного угла do , а θ — угол между вектором $\mathbf{d}$ и направлением наблюдения $\mathbf{n}$. Таким образом, диполь не изучает в направлении своего ускорения. Вычисляя интеграл по всем сферическим углам находим, что полная интенсивность излучения, проходящая через сферу радиуса r окружающую источник, равна

$$I_d(t) = r^2 \int do (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) = \frac{2(\ddot{\mathbf{d}}(t_R))^2}{3c^3}. \quad (6.19f)$$

Отметим два общих момента на примере электро-дипольного излучения. Для выделения частей поля, соответствующих уходящему излучению, в разложении (4.10) надо удерживать только нулевой порядок по малому параметру a/r (6.19b). Соответственно, поле уходящих волн зависит от второй временной производной дипольного момента. Поэтому, во-первых, здесь нет неопределённости, зависящей от выбора начала системы координат, которая имела место быть при вычислении статического дипольного момента при ненулевом полном заряде, поскольку эта неопределённость добавляет в дипольный момент константу, не зависящую от времени. Во-вторых, излучение возникает только в том случае, если заряды движутся с ускорением. Эти рассуждения обобщаются на любой тип излучения.

Рассмотрим частный случай, когда заряды в системе совершают периодическое движение с частотой ω , так что

$$\mathbf{d} = 2 \operatorname{Re} (\mathbf{d}_0 \exp(-i\omega t)), \quad (6.19g)$$

где $\mathbf{d}_0$ — комплексная амплитуда колебаний диполя. В таком случае комплексные амплитуды полей

$$\mathbf{B} = k^2 \left(1 + \frac{i}{kr} \right) \frac{[\mathbf{n} \times \mathbf{d}_0]}{r}, \quad (6.19h)$$

$$\mathbf{E} = (1 - ikr) \frac{3(\mathbf{d}_0 \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{d}_0}{r^3} - \frac{k^2 [\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{d}_0]]}{r},$$

где волновой вектор $k = \omega/c$. Средняя по периоду колебаний интенсивность излучения в единицу телесного угла и полная интенсивность излучения равны

$$\frac{dI_d}{do} = \frac{c}{2\pi} \operatorname{Re} (\mathbf{n} \cdot [\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*]), \quad I_d = \frac{4\omega^4 |\mathbf{d}_0|^2}{3c^3}. \quad (6.19i)$$

Если же диполь излучал конечное время, то полную излученную энергию E можно представить как арифметическую сумму от вкладов отдельных монохроматических волн, см. аналогичное рассуждение (4.37). Разложим закон изменения дипольного момента во времени по Фурье-гармоникам,

$$\mathbf{d}_\omega = \int dt e^{i\omega t} \mathbf{d}(t).$$

Ввиду линейности зависимости поля излучения от тока в источнике, каждая Фурье-компонента $\mathbf{d}_\omega$ возбуждает Фурье-компоненту электромагнитного поля в соответствии с законом (6.19h). Поэтому сумма по Фурье-гармоникам поля эквивалентна сумме по Фурье-гармоникам $\mathbf{d}_\omega$. Полная излученная энергия

$$E \equiv \int dt I_d = \frac{2}{3c^3} \int_{-\infty}^{+\infty} dt |\ddot{\mathbf{d}}|^2 = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} E_\omega, \quad (6.19j)$$

где величина E_ω называется спектральной плотностью излученной энергии и равна

$$E_\omega = \frac{4\omega^4}{3c^3} |\mathbf{d}_\omega|^2, \quad (6.19k)$$

сравни со спектральным разложением энергии в плоской волне (4.38).

6-3.2 Задачи

• **Задача 1:** Показать, что в волновой зоне при Лоренцевой калибровке потенциалов скалярный потенциал ограниченной излучающей системы может быть выражен через векторный потенциал формулой $\varphi = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A})$.

6-3.2.1 Дипольное излучение

• **Задача 2:** Система движущихся зарядов представляет собой гармонически колеблющийся точечный диполь. Пользуясь соображениями симметрии и размерности, определите с точностью до числового коэффициента момент сил в единицу времени, который уносит с собой излучение, производимое диполем.

• **Задача 3:** Заряд q движется с постоянной скоростью v вдоль окружности радиуса a . Чему равна интенсивность излучения I ? Введите подходящую систему координат и опишите поляризацию сферической волны, уходящей на бесконечность от заряда.

• **Задача 4:** Простейшая модель излучения нейтронных звёзд (пульсаров) — это модель наклонного ротатора: шар, имеющий магнитный момент $\boldsymbol{\mu}$, вращается в вакууме с угловой скоростью ω вокруг оси, составляющей угол φ с направлением $\boldsymbol{\mu}$. Вычислить угловое распределение $dI/d\Omega$ и полную интенсивность I излучения, усреднённые по времени.

• **Задача 5:** Два электрических диполя колеблются вдоль линий по гармоническому закону с одинаковой

частотой ω , но сдвинуты по фазе на $\pi/2$. Амплитуды дипольных моментов равны по величине p и направлены под углом φ друг к другу. Расстояние между осцилляторами мало по сравнению с длиной волны. Найти магнитное поле $\mathbf{B}$ в волновой зоне, угловое распределение $\langle dI/d\Omega \rangle$ и полную интенсивность I излучения.

• **Задача 6:** Два одноименных заряда $(e_1, m_1; e_2, m_2; e_1 e_2 > 0)$ испытывают лобовое столкновение. Определить излученную энергию, если задана относительная скорость на бесконечности $v_\infty \ll c$. Рассмотреть случай $e_1/m_1 \neq e_2/m_2$.

• **Задача 7:** Диполь $\mathbf{d} \parallel Oz$ колеблется с частотой ω , так что $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \cos(\omega t)$. На расстоянии $L \gg \lambda$ в направлении оси Oz (где λ — соответствующая длина волны излучения) находится другой диполь $\mathbf{p}$, колебания которого описываются уравнением $\partial_t^2 \mathbf{p} + \omega^2 \mathbf{p} = (e^2/m)\mathbf{E}$, где e и m — эффективные заряд и масса диполя, а $\mathbf{E}$ — полное поле в точке положения диполя. Найдите амплитуду и фазу колебаний второго диполя. Указание: разделите внешнее поле $\mathbf{E}$ в уравнении движения второго диполя на поле первого диполя и поле самого второго диполя; действие последнего даёт силу радиационного трения.

Решение: Условие $L \gg \lambda$ означает, что второй диполь находится в волновой зоне первого излучающего диполя. С другой стороны, поле уходящих волн в направлении Oz равно нулю. Это означает, что в (6.19c) следует удерживать среднее слагаемое, которое было бы подавлено по сравнению с последним, если бы диполь $\mathbf{p}$ находился не на оси Oz . Итак, поле диполя $\mathbf{d}$ в месте положения диполя $\mathbf{p}$ есть

$$\mathbf{E}_d = \frac{2\dot{\mathbf{d}}}{cL^2}$$

Таким образом, уравнение колебаний второго диполя есть

$$\ddot{\mathbf{p}} + \omega_0^2 \mathbf{p} = \frac{e^2}{m} \mathbf{E}_d + \frac{e}{m} \mathbf{F}_{\text{Лф}} = \frac{2e^2 \dot{\mathbf{d}}}{mcL^2} + \frac{2e^2}{3mc^3} \ddot{\mathbf{p}}.$$

В правой части мы учли, что на диполь $\mathbf{p}$ действует не только поле диполя $\mathbf{d}$, но и произведённое им самим поле, действие которого приводит к появлению лоренцевской силы трения, см. (6.29). Представим $\mathbf{d}$ и $\mathbf{p}$ в виде комплексных амплитуд,

$$\mathbf{d} = \text{Re}(\mathbf{d}_0 e^{-i\omega t}), \quad \mathbf{p} = \text{Re}(\mathbf{p}_0 e^{-i\omega t})$$

Тогда уравнение на комплексную амплитуду $\mathbf{p}$

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{2ie^2\omega^3}{3mc^3} \right) \mathbf{p}_0 = -\frac{2ie^2\omega}{mcL^2} \mathbf{d}_0.$$

В частности, если собственная частота второго диполя совпадает с частотой первого диполя, $\omega_0 = \omega$, то

$$\mathbf{p} = \frac{3c^2}{\omega^2 L^2} \mathbf{d}_0 \cos(\omega t) = \frac{3}{4\pi^2} \frac{\lambda^2}{L^2} \mathbf{d}_0 \cos(\omega t) \quad (6.20)$$

§6.4. Магнито-дипольное и квадрупольное излучение

Как и электро-дипольный момент, изменяющиеся во времени магнито-дипольный и/или квадрупольный моменты системы также проводят к излучению системой электромагнитных волн. Оба этих вклада в электромагнитное поле имеют один и тот же порядок — второй — по малым параметрам (6.19b). Поэтому отдельной задачей является разделение этих вкладов для установления их соответствия с магнито-дипольным и квадрупольными моментами системы.

6-4.0.1 Магнито-дипольное излучение

Для того, чтобы выделить вклад от магнито-дипольного момента, рассмотрим вклад второго порядка по малым параметрам (6.19b) в вектор-потенциал $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}^k = n^i \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial_t}{c} \right) \frac{1}{r} \int d^3 r' \frac{r'^i j'^k}{c}, \quad \mathbf{j}' = \mathbf{j}(t_R, \mathbf{r}'). \quad (6.21a)$$

В отличие от § 2, сейчас мы рассматриваем нестационарную ситуацию. Поэтому в общем случае $\text{div } \mathbf{j} \neq 0$, и мы не можем непосредственно воспользоваться определением магнитного момента (5.7b). Для того, чтобы выделить мгновенное значение магнитного момента, разделим тензор второго порядка, стоящий под знаком интеграла, на симметричную и антисимметричную части:

$$\frac{r'^i j'^k}{c} = \frac{r'^i j'^k + r'^k j'^i}{2c} + \frac{r'^i j'^k - r'^k j'^i}{2c}.$$

При интегрировании по $d^3 r'$ второго слагаемого в правой части мы получим мгновенное значение магнито-дипольного момента μ^{ik} . Интеграл по $d^3 r'$ от первого слагаемого можно представить как полную производную по времени. В результате вектор-потенциал оказывается представим в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^k &= \frac{n^i}{2cr} \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial_t}{c} \right) \partial_t \int d^3 r' r'^i r'^k \rho' + \\ &+ \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial_t}{c} \right) \frac{[\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{n}]^k}{r}, \quad \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(t_R). \end{aligned} \quad (6.21b)$$

Выражение (6.21b) переходит в выражение для вектор-потенциала статического магнитного диполя (5.7c) в ближней зоне.

Удержим пока что в (6.21b) только второй, магнито-дипольный, вклад. Используя (3.14) получаем, что электромагнитное поле

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{3(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}}{r^3} + \frac{3(\dot{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\mu}}}{cr^2} + \frac{[\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \ddot{\boldsymbol{\mu}}]]}{c^2 r}, \\ \mathbf{E} &= \frac{[\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\mu}}]}{cr^2} + \frac{[\mathbf{n} \times \ddot{\boldsymbol{\mu}}]}{c^2 r}. \end{aligned} \quad (6.21c)$$

Видна зеркальная симметрия между полями электрического диполя (6.19c, 6.19d) и полями магнитного диполя (6.21c).

6-4.0.2 Квадрупольное излучение

Нам осталось учесть вклад всего второго порядка разложения в скалярный потенциал

$$\varphi = \frac{n^i n^k}{2r^2} \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial_t}{c} \right) D^{ik} + \frac{n^i n^k}{2c^2 r} \partial_t^2 \int d^3 r' r'^i r'^k \rho', \quad (6.21d)$$

где D^{ik} есть квадрупольный момент системы (5.2i) в данный момент времени, и часть вклада этого порядка в вектор-потенциал, выписанную в первой строчке (6.21b). Результат в действительности зависит только от квадрупольного момента системы D^{ik} . Чтобы показать это формально, совершим калибровочное преобразование (3.17a) с

$$f = -\frac{\partial_t}{6cr} \int d^3 r' r'^2 \rho(t_R, \mathbf{r}'), \quad \partial_\mu \partial^\mu f = 0 \quad \text{at } r > a,$$

которое, отметим, не нарушает условие калибровки Лоренца вне излучающей системы (внутри системы это калибровочное преобразование вносит в 4-потенциал нефизическую особенность в нуле). Теперь, используя определение квадрупольного момента (5.2i), получаем, что исследуемая часть 4-потенциала принимает вид

$$\begin{aligned} \varphi &= \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\partial_t}{cr} + \frac{\partial_t^2}{3c^2} \right) \frac{D^{ik} n^i n^k}{2r}, \\ A^i &= \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial_t}{c} \right) \frac{n^k \partial_t D^{ik}}{6cr}. \end{aligned} \quad (6.21e)$$

Первое слагаемое в выражении для скалярного потенциала φ соответствует полю статического квадрупольного момента, см. (5.2a). На далёких расстояниях электрическое поле представляет из себя расходящуюся сферическую волну

$$\mathbf{E}^l = \left(-\frac{\partial_t}{c} \right) \frac{\delta_\perp^{li} n^k \partial_t^2 D^{ik}}{6c^2 r}, \quad \mathbf{B} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}], \quad (6.21f)$$

где $\delta_\perp^{li} = \delta^{li} - n^l n^i$. Интенсивность излучения в единицу телесного угла

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{1}{144\pi c^5} \left(n^i n^k \ddot{D}^{il} \ddot{D}^{kl} - (n^i n^k \ddot{D}^{ik})^2 \right). \quad (6.21g)$$

Дипольный, квадрупольный и магнито-дипольный вклады в излучение интерферируют между собой. Для того, чтобы найти интенсивность излучения в элемент телесного угла, надо произвести сложение полей, а после вычислить вектор Пойнтинга. Однако полная интенсивность излучения I является арифметической суммой интенсивностей каждого вида излучения по отдельности,

$$I = I_d + I_\mu + I_D,$$

поскольку электромагнитное поле для каждого вида излучения имеет свою отличную от других вкладов угловую симметрию, в результате чего перекрёстные вклады в интенсивность излучения при интегрировании по углам обращаются в нуль. Полные интенсивности магнито-дипольного и квадрупольного излучений равны

$$I_\mu = \frac{2(\ddot{\mu})^2}{3c^3}, \quad I_D = \frac{\ddot{D}^{ik} \ddot{D}^{ik}}{180c^5}. \quad (6.21h)$$

В частности, если квадрупольный момент всегда остаётся аксиально симметричным с постоянной осью симметрии, см. (5.2j), то интенсивность излучения квадрупольного типа равна

$$I_D = \frac{\ddot{D}^2}{120c^5}. \quad (6.21i)$$

6-4.1 Поле излучения как асимптотика на больших расстояниях

Если мы интересуемся только излучением, производимым системой зарядов, то нам нужно удерживать в 4-потенциале только вклады, пропорциональные $1/r$. Для этого надо в выражении для запаздывающего вектор-потенциала (4.10) представить запаздывающее время в виде

$$t_r \approx t_R + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')/c,$$

а также произвести замену в знаменателе $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. В результате придём к выражению

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{cr} \int d^3r' \mathbf{j}(t_R + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')/c, \mathbf{r}') \quad (6.22)$$

Далее, далеко от источника электромагнитное поле представляет собой плоскую волну, распространяющуюся в направлении единичного вектора $\mathbf{n}$. Поэтому нам важен только поперечный вклад в 4-потенциал, см. (4.32). В поперечной калибровке $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A}/c$, а для локально плоской волны магнитное поле $\mathbf{B} = -[\mathbf{n} \times \mathbf{E}]$, см. (4.25).

Таким образом, нахождение электромагнитного поля излучения оказывается заметно проще нахождения всего поля. В частности, во втором порядке по v/c выражение (6.22) есть

$$A^k \approx \frac{\partial_t}{cr} \int d^3r' j^{ik} + \frac{n^i \partial_t}{cr} \int d^3r' \frac{r'^i j^{ik}}{c}.$$

Первое слагаемое есть радиационное поле электрического диполя. Разделим второе слагаемое (сравни с (6.21a)) на симметричный и антисимметричный вклады, как это было сделано в (6.21b). Получим:

$$A^k \approx \frac{\partial_t d^l}{cr} + \frac{n^i \partial_t^2}{6c^2 r} \int d^3r' 3\rho r'^i r'^k + \frac{n^i \partial_t \mu^{ik}}{cr}.$$

Далее домножим левую и правую части (6.21b) на $\delta_\perp^{lk}$, что не изменит поперечных компонент A^k . После этого

к подынтегральному выражению второго слагаемого мы можем прибавить $\delta^{ik} r'^2 \rho'/3$, поскольку с учётом имеющегося n^i это не изменит всего выражения. В результате придём к

$$A^l = \frac{d^l}{rc} + \frac{\delta_\perp^{lk} n^i}{6c^2 r} \ddot{D}^{ik} + \frac{[\dot{\mu} \times \mathbf{n}]^l}{cr}$$

Второе слагаемое есть квадрупольное излучение (6.21f), третье — магнитодипольное (6.21c). В третьем слагаемом проектор $\delta_\perp^{lk}$ был опущен, поскольку он не изменяет вектор $[\dot{\mu} \times \mathbf{n}]$, который уже ортогонален $\mathbf{n}$.

Отметим, что домножению на проектор $\delta_\perp^{lk}$ соответствует некоторое калибровочное преобразование. При этом преобразовании, возможно, появляются вклады в вектор-потенциал пропорциональные $1/r^2$, которые не должны приниматься во внимание, поскольку мы интересуемся только излучением.

6-4.2 Задачи

6-4.2.1 Магнито-дипольное излучение

• **Задача 1:** Однородно заряженный шарик, имеющий массу m и заряд q , вращается с угловой скоростью $\omega \ll c/a$, где a — его радиус. Шарик находится в однородном магнитном поле. Ось вращения составляет угол ϑ с направлением магнитного поля. Найдите угловую диаграмму интенсивности излучения. Определите поляризацию волны, уходящей в направлении вдоль магнитного поля. Определите полную интенсивность излучения.

• **Задача 2:** Нерелятивистский электрон пролетает между обкладок конденсатора, параллельно его обкладкам и через его центр. Заряд на обкладках конденсатора настолько мал, что траектория электрона является почти прямой линией. Радиус круглых обкладок конденсатора R , скорость электрона v . Найдите излучённую электроном энергию.

Решение:

6-4.2.2 Квадрупольное излучение

• **Задача 3:** Два одноименных заряда ($e_1, m_1; e_2, m_2; e_1 e_2 > 0$) испытывают лобовое столкновение. Определить излучённую энергию, если задана относительная скорость на бесконечности $v_\infty \ll c$. Рассмотреть случай $e_1/m_1 = e_2/m_2$.

• **Задача 4:** Два одинаковых заряда q совершают одинаковые гармонические колебания вдоль некоторого направления (одинаковые амплитуда a , частота ω и положение равновесия), но смещённые по фазе на пол периода. Движение зарядов нерелятивистское. Найдите интенсивность излучения такой системы.

• **Задача 5:** Определить частоту ω_r света, рассеянного движущимся зарядом со скоростью $\mathbf{v}$, в зависимости от направления рассеяния. Волновой вектор рассеивающейся световой волны равен $\mathbf{k}$. Считать, что в системе отсчёта, где электрон покоится, энергия квантов света (фотонов) мала по сравнению с его массой покоя.

• **Задача 6:** Электрический диполь с амплитудой момента p_0 и частотой ω находится на расстоянии a от идеально проводящей плоскости ($a \ll \lambda$, вектор p_0 параллелен плоскости). Найти электромагнитное поле E , H на расстояниях $r \gg \lambda$ и угловое распределение излучения $dI/d\Omega$.

6-4.2.3 Когерентное излучение

• **Задача 7:** Магнитный $\boldsymbol{\mu}$ и электрический диполь $\mathbf{d}$ прикреплены к точечному объекту и колеблются с частотой ω , $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 \cos(\omega t)$, $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Чему равна сила (её среднее по периоду колебаний значение), необходимая для удержания в покое этого объекта? Сначала найдите ответ с точностью до численного множителя путём установления его симметрии и размерности. Затем путём точного исследования задачи установите неизвестный численный коэффициент. Проведите численный расчёт, если полная мощность излучения равна 1 ГВт (мощность генерации одного атомного реактора), направление диполей ортогональны $\boldsymbol{\mu}_0 \perp \mathbf{d}_0$, $\mu_0 = d_0$ и нет задержки фазы, $\varphi = 0$.

Если $\varphi = 0$, такой источник излучения называется *элементарным излучателем Гюйгенса (Huygens' radiation source)*.

Решение: Из соображений симметрии следует, что средняя по времени сила

$$\langle \mathbf{F} \rangle \propto \frac{\omega^4}{c^4} [\mathbf{d}_0 \times \boldsymbol{\mu}_0],$$

где множитель мы подобрали из соображений размерности. Действительно, поскольку $\boldsymbol{\mu}$ – аксиальный вектор, а $\mathbf{d}$ – полярный, то $\mathbf{F}$ является полярным вектором, как и должно быть.

Для того, чтобы найти численный коэффициент и множитель, зависящий от фазы, приступим к вычислениям. Посчитаем, какой импульс уносится в единицу времени производимой системой диполей излучением. За время dt образуется сферический слой излучения толщиной $dr = c dt$ (и радиусом r). Импульс этой порции излучения $d\mathbf{P}$ есть интеграл по слою от пространственной плотности импульса $\vec{p}$, см. (2.3f). Плотность

импульса пропорциональна плотности потока энергии $\mathbf{S}$, см. (2.3g). Таким образом, сила $\mathbf{F}$, которую надо прикладывать к излучающей системе, равна

$$\mathbf{F}(t - r/c) = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = r^2 dr \int d\Omega \frac{\mathbf{S}}{c^2}.$$

где $d\Omega$ – элемент телесного угла. Полное электромагнитное поле является суперпозицией вкладов от электрического и магнитного диполя, например $\mathbf{E} = \mathbf{E}_d + \mathbf{E}_\mu$. Для вычисления силы $\mathbf{F}$ в векторе Умова-Пойнтинга $\mathbf{S}$ (4.21b) надо оставить только интерференционные члены, поскольку чисто электро-дипольное или магнито-дипольное излучение не сообщает излучающей системе импульс:

$$\mathbf{S} \rightarrow \frac{c([\mathbf{E}_d \times \mathbf{B}_\mu] + [\mathbf{E}_\mu \times \mathbf{B}_d])}{4\pi},$$

Для полей имеем, выделяя в (6.19c, 6.19d) и (6.21c) части, соответствующие уходящим волнам:

$$\mathbf{E} = \frac{[\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}]]}{c^2 r} + \frac{[\mathbf{n} \times \ddot{\boldsymbol{\mu}}]}{c^2 r},$$

$$\mathbf{B} = -\frac{[\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}]}{c^2 r} + \frac{[\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \ddot{\boldsymbol{\mu}}]]}{c^2 r}.$$

В результате получаем, что мгновенное значение силы

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{2}{c^4} \int \frac{d\Omega}{4\pi} [[\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}] \times [\mathbf{n} \times \ddot{\boldsymbol{\mu}}]] = \\ &= \frac{2\omega^4}{3c^4} [\mathbf{d}_0 \times \boldsymbol{\mu}_0] \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

(два ненулевых интерференционных вклада в вектор Умова-Пойнтинга после использования преобразований векторной алгебры оказываются равными друг другу). Сила, усреднённая по времени, равна

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \frac{\omega^4}{3c^4} [\mathbf{d}_0 \times \boldsymbol{\mu}_0] \cos \varphi. \quad (6.23)$$

Вставить рисунок с угловой зависимостью интенсивности излучения в единицу телесного угла

• **Задача 8:** Электродипольный и магнитодипольный моменты некоторой ограниченной системы зарядов изменяются со временем по закону $p(t) = p_0 \exp(-t^2/\tau^2)$, $\mu(t) = \mu_0 \exp(-t^2/\tau^2)$, где p_0 , μ_0 , τ – постоянные величины. Вычислить спектральную плотность излучения $dI_\omega/d\omega$.

§6.5. Торможение излучением

Изложение ведётся в обозначениях § 1.

6-5.1 Скорость производства электромагнитной энергии уходящих волн

Поле, произведённое движущейся с ускорением частицей, уносит энергию и импульс. Пусть за время движения частицы dt_r (иногда время t_r называют также “ретардированное”) была рождена группа волн с 4-импульсом

$$\|dP_r^\mu\| = \{dE_r/c, d\mathbf{P}_r\}.$$

Вообще говоря, из соображений закона сохранения энергии-импульса эти энергия и импульс должны быть равны изменению $dp^\mu = \{dE/c, d\mathbf{p}\}$ энергии и импульса частицы, взятым с обратным знаком. Тем не менее, в классической (неквантовой) электродинамике как в теории есть встроенное противоречие, которое как раз в данном вопросе даёт о себе знать. А именно, электромагнитная энергия точечного заряда равна бесконечности. В результате в обоих частях равенства, выражающего сохранение энергии-импульса, присутствует бесконечный вклад, и его сокращение в общем случае некорректно.

Пусть частица влетает, а затем вылетает из области, где электромагнитное поле отлично от нуля. Тогда для 4-импульса имеет место только интегральное условие сохранения

$$\int dP_r^\mu + \int \left(dp^\mu - \frac{e}{c} F^{\mu\nu} dx_\nu \right) = 0, \quad (6.24)$$

где интеграл берётся вдоль мировой линии; на концах участка интегрирования сокращение бесконечной электромагнитной энергии точечной частицы корректно, поскольку она движется равномерно и прямолинейно. В (6.24) $F^{\mu\nu}$ — внешнее электромагнитное поле, из которого исключено поле излучения рассматриваемой частицы. Равенство (6.24) выражает полный баланс энергии-импульса, см. в том числе уравнение Лоренца (3.10). Без знаков интеграла это равенство в рамках классической электродинамики в общем случае неверно.

Пусть траектория частицы известна. Покажем здесь, что скорость производства энергии $W = dE_r/dt_r$ уходящих электромагнитных волн движущегося с ускорением заряда, рассчитанная по шкале времени испускания им волн, является релятивистским инвариантом. (Здесь t_r — время, одновременно параметризующее и движение частицы, и процесс испускания зарядом волн.) А именно, изменение энергии-импульса волн

$$dP_r^\mu = \frac{W}{c^2} dz^\mu, \quad W = \frac{dE_r}{dt_r} = -\frac{2ce^2}{3} w^\nu w_\nu, \quad (6.25)$$

где w^μ — 4-ускорение частицы, а z — траектория частицы.

Для доказательства перейдём в систему координат K' , в которой в момент t'_r заряд покоится. Рассмотрим ту часть уходящего излучения, которая была произведена окрестностью этого момента. Зафиксируем момент наблюдения $t' > t'_r$. Согласно (6.7), электрическое поле этой части излучения на сфере $|\mathbf{r}' - \mathbf{z}'(t'_r)| = c(t' - t'_r)$ описывается выражениями

$$\mathbf{E}'_{\text{rad}}(\mathbf{r}') = \frac{e[\mathbf{n}' \times [\mathbf{n}' \times \mathbf{a}']]}{c^2 R'}, \quad \mathbf{B}'_{\text{rad}} = \frac{e[\mathbf{a}' \times \mathbf{n}']}{c^2 R'}, \quad (6.26)$$

соответствующими радиационным вкладом в (6.19c, 6.19d), поскольку в нашем случае $\mathbf{R}'_v = \mathbf{R}'$. Интенсивность уходящего излучения определяется соответственно (6.19f),

$$W = \frac{dE'_r}{dt'_r} = \frac{2e^2 \mathbf{a}'^2}{3c^3}, \quad dP_r'^0 = \frac{dE'_r}{c dt'_r} dt'_r = \frac{W}{c} dt'_r.$$

Пространственные компоненты $dP_r'^i$ полного импульса рассматриваемой порции электромагнитных волн равны нулю, в силу симметрии интенсивности излучения: сколько импульса уходит в направлении $\mathbf{n}'$, столько и в обратном направлении $-\mathbf{n}'$. Таким образом, порция волн, испущенная за промежуток времени dt'_r , обладает 4-импульсом

$$dP_r'^\mu = \{dE'_r/c, \vec{0}\} = \frac{W}{c^2} dz'^\mu.$$

Вторым равенством мы переписали правую часть в релятивистско-инвариантном виде через единственный имеющийся в нашем распоряжении 4-вектор с нулевой пространственной частью — приращение 4-координаты dz'^μ . Коэффициент пропорциональности между двумя 4-векторами является релятивистским инвариантом, т.е. релятивистским инвариантом является скорость производства энергии уходящего излучения:

$$W = \frac{2e^2 \mathbf{a}'^2}{3c^3} = -\frac{2ce^2}{3} w^\nu w_\nu. \quad (6.27)$$

Таким образом, мы пришли к формуле (6.25).

6-5.2 Торможение излучением

В работе [Клепикив, 1985] подробно разобрана история вопроса.

Найдем теперь силу, действующую на ускоренно движущуюся частицу со стороны излучённого ею поля. Эту силу называют *силой торможения излучением* или *лоренцевской силой трения* (*Abraham–Lorentz force (also Lorentz–Abraham force), or the radiation reaction force, or the self force*). Как мы упоминали в Пункте 6-5.1, мгновенная мощность генерации уходящих волн не совпадает с мгновенной мощностью, отбираемой от частицы.

Мы рассматриваем часть мировой линии движения частицы, на котором в начале и в конце частица двигалась без ускорения, т.е. была вне действия внешнего электромагнитного поля. Либо, мы рассматриваем один период периодического движения частицы, так что вначале и в конце движения скорость частицы и все её производные равны друг другу.

Сначала рассмотрим нерелятивистскую частицу, и обозначим искомую силу $\mathbf{F}_{\text{Lf}}$. Полный баланс энергии должен сохраняться, так что

$$\int (\mathbf{F}_{\text{Lf}} \cdot \mathbf{v}) dt = - \int W dt = - \frac{2e^2}{3c^3} \int \dot{\mathbf{v}}^2 dt = \frac{2e^2}{3c^3} \int (\ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}) dt, \quad (6.28)$$

где скорость производства электромагнитной энергии уходящих волн W определяется (6.25). В последнем равенстве мы провели интегрирование по частям, пользуясь тем, что граничный вклад равен нулю, поскольку на концах мы предполагаем равномерное и прямолинейное движение (либо граничные члены сократились, если движение периодически). Из последнего равенства можно сделать вывод, что в уравнение движения следует добавить силу торможения излучением $\mathbf{F}_{\text{Lf}}$,

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] + \mathbf{F}_{\text{Lf}}, \quad \mathbf{F}_{\text{Lf}} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}. \quad (6.29)$$

Вообще говоря, в данном выводе мы могли упустить вклад в силу, нормальный к направлению скорости частицы. Однако такого вклада существовать не может. Покажем это. Перейдём в систему отсчёта, двигающуюся со скоростью $\mathbf{V}$ (предполагаем, что скорость мала, так что преобразование Лоренца есть преобразование Галилея) такую, чтобы интеграл от неучтённой части силы имел ненулевую проекцию на $\mathbf{V}$. В этом случае баланс энергии (6.28), записанный в новой системе отсчёта, уже не будет выполняться. Вклад же, который представлял бы из себя полную производную, и от которого кроме того интеграл был бы равен нулю, составить из скорости и её производных невозможно.

6-5.2.1 Применимость концепции силы торможения излучением

В уравнении движения (6.29) сила торможения $\mathbf{F}_{\text{Lf}}$ должна быть мала по сравнению с первыми двумя вкладом, возникающими из-за действия внешнего электромагнитного поля. Действительно, в противном случае мы получили бы уравнение типа

$$\dot{\mathbf{v}} = \alpha \ddot{\mathbf{v}}, \quad \alpha > 0,$$

которое даёт “самоускорение” частицы.

Получим условия применимости уравнения движения нерелятивистского заряда со включённой силой лоренцевского трения. Будем исходить из требования, чтобы изменение энергии ΔE_{rad} частицы в силу действия лоренцевской силы трения за время Δt было мало по сравнению с изменением ΔE_{kin} кинетической энергии

частицы под действием внешнего электромагнитного поля. Время Δt может быть характерным временем изменения либо направления движения частицы, либо её ускорения — т.е. в этом случае временем изменения электромагнитного поля, действующего на частицу. Имеем:

$$\Delta E_{\text{rad}} \sim \frac{2e^2 \dot{\mathbf{v}}^2 \Delta t}{3c^3} = \frac{2e^2 \dot{\mathbf{v}} \Delta \mathbf{v}}{3c^3}, \quad \Delta E_{\text{kin}} \sim m \mathbf{v} \Delta \mathbf{v}.$$

Наше требование приводит нас к неравенству

$$\frac{\Delta E_{\text{rad}}}{\Delta E_{\text{kin}}} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta t \sim \frac{v}{|\dot{\mathbf{v}}|} \gg \frac{r_0}{c},$$

где r_0 — классический радиус электрона (5.3b). Выразим это условие в терминах электромагнитного поля. Условие на магнитное поле B можно получить, если в (6.29) положить электрическое поле равным нулю и потребовать условия $|\dot{\mathbf{v}}|/v \ll c/r_0$. Второе условие заключается в том, чтобы само поле менялось не слишком быстро, на временах $\Delta t \gg r_0/c$. Эти условия можно записать в виде

$$r_0 e B \ll m c^2, \quad \lambda \gg r_0, \quad (6.30)$$

где $\lambda \sim c/\Delta t$ — характерная длина волны падающего на частицу электромагнитного поля. Таким образом, поле не должно быстро меняться и не должно быть слишком большим по амплитуде.

6-5.3 Задачи

• **Задача 1:** Нерелятивистский электрон движется по окружности в постоянном однородном магнитном поле $\mathbf{B}$. Найти закон изменения его кинетической энергии во времени $\mathcal{E}(t)$, учтя производимое электроном излучение. Найти траекторию электрона.

• **Задача 2:** Если считать, что процесс аннигиляции электрона и позитрона запрещён, то можно рассмотреть позитроний — связанное состояние электрона и позитрона. Рассмотрим классическое движение этих частиц и пусть частицы движутся по круговым орбитам. Опишите дальнейшее движение частиц с учётом производимого системой излучения.

• **Задача 3:** Нерелятивистская частица с зарядом $-e$ и массой m движется в поле неподвижного точечного заряда Ze по круговой орбите. Найти уравнение траектории частицы с учётом производимого ею излучения.

• **Задача 4:** Заряд, связанный в гармоническом потенциале, отклонён от положения равновесия на расстояние a и зафиксирован в этом положении. В некоторый момент заряд отпускают. Определите спектр излучения заряда к моменту, когда он уже практически остановился (амплитуда колебаний стала мала по сравнению с исходной). Масса заряда m , частота собственных колебаний ω_0 .

6-5.3.1 Излучение релятивистских частиц

• **Задача 5:** Для релятивистского электрона, движущегося в однородном магнитном поле, найдите закон изменения его энергии и радиуса его орбиты со временем за счёт потерь на излучение. Направление движения электрона перпендикулярно магнитному полю.

• **Задача 6:** Две ультра-релятивистские частицы с противоположными электрическими зарядами пролетают мимо друг друга на прицельном расстоянии $\rho \gg r_0$ (r_0 – классический радиус электрона), так что их траектории движения мало отличаются от прямых. Оценить время (в лабораторной системе координат и в системе координат одной из частиц), на котором одна частица на другую действует посредством кулоновской силы существенно (то есть порядка пиковой силы). Оцените полную излучённую частицами энергию.

Решение: По условию в главном приближении частицы движутся равномерно и прямолинейно. Поэтому для определения электрического поля, действующего со стороны одной частицы на другую, надо пользоваться выражением (6.10). Выберем декартову систему координат с осью Ox , направленной по движению частиц. Траектории частиц лежат в плоскости Oxy . Траектории частиц $\{x_1(t), y_1(t)\}$ и $\{x_2(t), y_2(t)\}$ суть

$$x_1 = vt, \quad y_1 = -\rho/2, \quad x_2 = -vt, \quad y_2 = \rho/2.$$

В терминах (6.10)

$$\mathbf{r} - \mathbf{z}(t) = \{2vt, \rho, 0\}, \quad \sin^2 \theta_t = \frac{\rho^2}{4v^2 t^2 + \rho^2},$$

поэтому

$$|\mathbf{r} - \mathbf{z}(t)| \sqrt{1 - (v/c)^2 \sin^2 \theta_t} \approx \frac{1}{\gamma} \sqrt{4\gamma^2 c^2 t^2 + \rho^2},$$

где мы воспользовались тем, что $v^2/c^2 = 1 - 1/\gamma^2$ и пренебрегли малыми по $1/\gamma$ поправками. Теперь можно записать полное выражение (6.11) для электромагнитного поля, действующего со стороны частицы №1 на частицу №2

$$\mathbf{E}(t) = \frac{\gamma e}{(4\gamma^2 c^2 t^2 + \rho^2)^{3/2}} \{2vt, \rho, 0\},$$

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\gamma e}{(4\gamma^2 c^2 t^2 + \rho^2)^{3/2}} \{0, 0, \rho v/c\},$$

мы добавили выражение (6.11) для определения магнитного поля. Из этих выражений следует, что время действия δt электромагнитного поля в лабораторной системе координат оценивается как

$$\delta t \sim \frac{\rho}{2\gamma c}.$$

В системе отсчёта K' , движущейся со скоростью $-v$ (почти сопровождающей частицу №2), γ -фактор для частицы №1 равен

$$\gamma' = \gamma^2(1 + v^2/c^2) \approx 2\gamma^2,$$

что можно получить, например, возведя матрицу лоренцевского буста (1.4с) в квадрат. Выражения для координат частиц и электрического поля, действующего со стороны частицы №1 на частицу №2, переписываются в аналогичном виде

$$x_1 = v't', \quad y'_1 = -\rho/2, \quad x'_2 = 0, \quad y'_2 = \rho/2,$$

$$\mathbf{E}' = \frac{\gamma' e}{(\gamma'^2 c^2 t'^2 + \rho^2)^{3/2}} \{v't', \rho, 0\},$$

Таким образом, время действия поля частицы №2 на частицу №1 оценивается, соответственно, как

$$\delta t' \sim \frac{\rho}{\gamma' c} \sim \frac{\delta t}{\gamma}.$$

Теперь оценим энергию, излучённую второй частицей. Интенсивность производства энергии излучения W одна и та же во всех системах отсчёта, см. (6.27). Её проще найти в системе K' , где частица №2 всегда остаётся нерелятивистской:

$$W = \frac{2e^2 a'^2}{3c^3} = \frac{2e^4 (E'^y)^2}{3c^3 m^2}$$

где мы учли только y -компоненту ускорения $a'^y = eE'^y/m$, поскольку x -компонента электрического поля относительно мала как $1/\gamma'$: действительно, в выражении для $\mathbf{E}'$ вследствие знаменателя $c|t'| \lesssim \rho/\gamma'$, при больших по модулю значениях t' знаменатель делает полное электрическое поле малым. Пиковые значения электрического поля и мощности равны

$$E'_{\max} = \frac{\gamma' e}{\rho^2}, \quad W_{\max} = \frac{2e^6 \gamma'^2}{3c^3 \rho^4} = \frac{8e^6 \gamma^4}{3c^3 \rho^4}.$$

В итоге получаем, что оценкой для полной излучённой энергии обоими частицами в лабораторной системе координат является

$$E_{\text{rad}} \sim W_{\max} \delta t \sim \frac{\gamma^3}{(mc^2)^2} \left(\frac{e^2}{\rho} \right)^3. \quad (6.31)$$

Проверим то, что частица №2 в системе K' в самом деле остаётся нерелятивистской. Действительно, скорость частицы №2 после действия со стороны частицы №1 — т.е. интеграл от y -компоненты ускорения — оценивается как

$$\frac{1}{c} \int dt' a'^y \sim \frac{\delta t' e E'_{\max}}{mc} \sim \frac{e^2}{\rho mc^2} = \frac{r_0}{\rho} \ll 1.$$

Кроме того, за время пролёта частицы №1 частица №2 сместится на расстояние, малое по сравнению с исходным прицельным расстоянием ρ . Действительно, отношение смещения к прицельному расстоянию

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} \sim \frac{(\delta t')^2 a'^y}{\rho} \sim \frac{1}{\gamma'} \frac{r_0}{\rho} \ll 1. \quad (6.32)$$

Часть II

КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Глава 7

ЛАГРАНЖЕВ И ГАМИЛЬТОНОВ
ФОРМАЛИЗМЫ

1	Формализм Лагранжа: одна степень свободы	93
2	Формализм Гамильтона: одна степень свободы	94
1.	Скобки Пуассона	94
2.	Каноническое преобразование	94
3.	Переменные уничтожения и рожденья a и a^*	94
4.	Действие в формализме Гамильтона	95
5.	Уравнение Гамильтона-Якоби	95
3	Законы сохранения	96
1.	Теорема Нётер	96

§7.1. Формализм Лагранжа: одна степень свободы

Пусть эволюция системы во времени полностью описывается её траекторией $q(t)$, где q — координата системы. Сейчас мы предполагаем, что величина q является одномерной величиной. В таком случае системой может быть, например, одномерная координата материальной точки.

Уравнения движения определяются экстремумом функционала

$$S = \int dt L(q, \dot{q}), \quad (7.1)$$

который называется действием. Здесь $L(q, \dot{q})$ — лагранжиан системы, который зависит от координаты системы q и скорости движения системы $\dot{q}$. Для наиболее простых теорий этот экстремум оказывается минимумом. Траектория $q(t)$, на которой достигается экстремум действия, называется истинной траекторией. По таким траекториям в действительности может эволюционировать классическая система.

Найдём истинную траекторию частицы. На истинной траектории $q(t)$ действие достигает экстремума, поэтому при фиксированных граничных условиях любая малая вариация δq истинной траектории δq должна привести к нулевой вариации действия (линеаризованной по вариации траектории), $\delta S = 0$. Граничными условиями примем следующие условия: частица начинает двигаться в момент времени t_a в точке q_a , а заканчивает движение в момент времени t_b в точке q_b ; при вычислении вариации действия будем сначала предполагать, что вариации подвергнуты и граничные значения $q_{a,b}$ (тогда

как $t_{a,b}$ фиксированы). В таком случае

$$\begin{aligned} \delta S &= S(\{q + \delta q\}) - S(\{q\}) = \\ &= \int_{t_a}^{t_b} dt \left(\frac{\delta L}{\delta q} - \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{q}} \right) \delta q + \left. \frac{\delta L}{\delta \dot{q}} \delta q \right|_a^b \end{aligned} \quad (7.2)$$

При фиксированном начальном и конечном положениях, когда $\delta q(t_a) = \delta q(t_b) = 0$, вариация действия оказывается равной нулю, т.е. траектория $q(t)$ является истинной, если на ней выполняется уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{q}} = \frac{\delta L}{\delta q}. \quad (7.3)$$

Это уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением по времени на координату q . Поскольку лагранжиан зависит от первой производной $\dot{q}$, то уравнение Лагранжа в общем случае является уравнением второго порядка. Поэтому для его решения необходимо два граничных условия, в нашем случае этими граничными условиями являются значения координаты q в начале и в конце движения.

Движение массивной частицы в потенциале.

Рассмотрим наиболее простой пример лагранжиана — лагранжиан нерелятивистской частицы массы m , движущейся в потенциале $\Pi(q)$:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m\dot{q}^2}{2} - \Pi(q).$$

В этом случае уравнение Лагранжа принимает вид уравнения Ньютона для частицы, движущейся под дей-

ствием внешней силы $f(q)$:

$$m\ddot{q} = f, \quad f(q) = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}.$$

Продолжение: книга Фейнман и Хибс, 1968, Гл.2, §1

§7.2. Формализм Гамильтона: одна степень свободы

Лагранжиан формально зависит от двух величин — координаты q и скорости $\dot{q}$. С другой стороны, при вариации действия S независимую вариацию имеет только траектория, $\delta q(t)$, тогда как вариация скорости может быть найдена из этой вариации простым дифференцированием по времени, $\delta \dot{q} = d(\delta q)/dt$. Этот же факт находит отражение в том, что уравнение Лагранжа оказывается уравнением второго порядка.

Как известно, дифференциальное уравнение второго порядка эквивалентно системе из двух дифференциальных уравнений первого порядка, при этом требуется ввести, помимо координаты q , ещё одну независимую функцию времени, которая должна иметь нетривиальную зависимость от скорости $\dot{q}$. Формализм Гамильтона, в частности, выполняет именно эту функцию. Кроме того, в нём уравнения движения переписываются в симметричной форме, что позволяет сделать ряд важных заключений.

Введём импульс

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad (7.4a)$$

и будем считать, что есть две возможности задать Лагранжиан: через пару переменных $\{q, \dot{q}\}$ и через пару переменных $\{q, p\}$; если известна одна пара переменных, то вторая пара может быть получена используя равенства (7.4a). Введём функцию Гамильтона (гамильтониан)

$$\mathcal{H} = p\dot{q} - L. \quad (7.4b)$$

Вариация гамильтониана

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{H} &= \dot{q} \delta p + p \delta \dot{q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} - \frac{\partial L}{\partial q} \delta q = \\ &= \dot{q} \delta p - \frac{\partial L}{\partial q} \delta q \end{aligned} \quad (7.4c)$$

определяется только вариациями координаты и импульса, то есть гамильтониан *может* быть представлен как функция *только* пары $\{q, p\}$,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q, p). \quad (7.4d)$$

Уравнение движения второго порядка (7.3) в формализме Лагранжа переписывается в виде системы двух уравнений первого порядка в формализме Гамильтона:

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}. \quad (7.4e)$$

Эквивалентность уравнений Гамильтона уравнению Лагранжа следует из вида вариации гамильтониана (7.4c). Переменные $\{q, p\}$ называют *каноническими переменными*.

Уравнения Гамильтона можно переписать в более компактной форме:

$$\partial_t Q = \hat{\epsilon} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta Q}, \quad \hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}.$$

7-2.1 Скобки Пуассона

Скобки Пуассона двух некоторых функций F и G от канонических переменных вычисляются согласно равенству

$$[F, G] = \frac{\delta F}{\delta q} \frac{\delta G}{\delta p} - \frac{\delta G}{\delta q} \frac{\delta F}{\delta p}. \quad (7.5a)$$

Из этого определения вытекает, что элементарная скобка Пуассона

$$[q, p] = 1. \quad (7.5b)$$

В терминах скобки Пуассона уравнения движения переписываются в виде

$$\dot{Q}_i = [Q_i, \mathcal{H}]. \quad (7.5c)$$

где $i = \{q, p\}$. Отсюда следует, что скорость изменения любой величины $F(q, p)$ определяется её скобкой Пуассона с Гамильтонианом

$$\dot{F} = [F, \mathcal{H}]. \quad (7.5d)$$

7-2.2 Каноническое преобразование

7-2.3 Переменные уничтожения и рождения a и a^*

Построим переменные

$$A = \begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix},$$

соответствующие операторам рождения-уничтожения в квантовой теории:

$$A = \hat{U}_a Q, \quad \frac{\delta}{\delta A} = \hat{U}_a^{-1, \tau} \frac{\delta}{\delta Q},$$

$$\hat{U}_a = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/c & ic \\ 1/c & -ic \end{pmatrix}, \quad \det \hat{U}_a = -i.$$

Здесь безразмерная постоянная s не определена. Она может быть зафиксирована исходя из дополнительных (физических) соображений. В дальнейшем мы полагаем её равной единице. Скобка Пуассона

$$[a, a^*] = \frac{1}{\det \hat{U}_a} = i,$$

так что формально преобразование $\hat{U}_a$ не является каноническим; В терминах новых переменных скобка Пуассона приобретает дополнительный множитель $\det \hat{U}_a$:

$$[F, G] = i \left(\frac{\delta F}{\delta a^*} \frac{\delta G}{\delta a} - \frac{\delta G}{\delta a^*} \frac{\delta F}{\delta a} \right).$$

В переменных a и a^* уравнения Гамильтона (7.4е) переписываются в виде

$$\dot{A} = -i\epsilon \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta A}. \quad (7.6)$$

Формулы (7.4е)-(7.6) могут быть без труда обобщены на случай системы с N степенями свободы.

7-2.4 Действие в формализме Гамильтона

В формализме Гамильтона действие системы по-прежнему есть интеграл по времени от лагранжиана,

$$S = \int dt L, \quad (7.7)$$

но теперь лагранжиан зависит от четырёх переменных:

$$L = L(q, \dot{q}, p, \dot{p}) = p\dot{q} - \mathcal{H}(q, p), \quad (7.8)$$

$$\text{или } L = L(a, \dot{a}, a^*, \dot{a}^*) = ia^*\dot{a} - \mathcal{H}(a, a^*),$$

с точностью до полного дифференциала по времени. Варьирование действия по $\{q, p\}$ даёт уравнения Гамильтона (7.4е), варьирование по переменным $\{a, a^*\}$ – уравнения (7.6).

Важно подчеркнуть, что временные производные от p, q входят в действие не более чем в первой степени. Поэтому уравнения движения Гамильтона (7.4е) оказываются уравнениями первой степени по времени, тогда как уравнение движения Лагранжа (7.3) в общем случае является уравнением второго порядка по времени.

Вариация действия (7.7) по положению начальной/конечной точек интегрирования даёт канонические импульсы и энергию. Воспользуемся (7.8), для того, чтобы переписать действие в виде

$$S = \int_{t_a}^{t_b} dt L = \int (p dq - \mathcal{H} dt) \quad (7.9)$$

Предположим теперь, что при вариации $t_{a,b} \rightarrow t_{a,b} + \delta t_{a,b}$, $q_{a,b} \rightarrow q_{a,b} + \delta q_{a,b}$. Тогда вариация действия по изменению положения конца пути равна

$$\frac{\delta S}{\delta t_{a,b}} = \mp \mathcal{H}(t_{a,b}), \quad \frac{\delta S}{\delta q_{a,b}} = \pm p(t_{a,b}). \quad (7.10)$$

Методически интересно получить это же утверждение (7.10) из рассмотрения вариации действия в лагранжевой форме (7.2). Такой путь более громоздкий, поскольку тот факт, что уравнения Лагранжа являются уравнениями второй степени, нарушает независимость вариаций времени и координаты. Варьированное действие имеет вид

$$S_{\text{var}} = \int_{t_a + \delta t_a}^{t_b + \delta t_b} dt L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}).$$

Для краткости выкладок ниже мы положим $\delta t_a = 0, \delta q_a = 0$. Вариация действия равна

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_a}^{t_b} dt \left(\frac{\delta L}{\delta q} - \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{q}} \right) \delta q + (p_b \delta q(t_b) + L \delta t_b) = \\ &= \int_{t_a}^{t_b} dt \left(\frac{\delta L}{\delta q} - \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{q}} \right) \delta q + (p_b \delta q_b - \mathcal{H} \delta t_b), \end{aligned} \quad (7.11)$$

сравни с (7.2). В процессе выкладок мы воспользовались определениями импульса (7.4а) и гамильтониана (7.4б), а также следующим соотношением для вариации обобщённой координаты q

$$\delta q(t_{a,b}) = \delta q_{a,b} - \dot{q}(t_{a,b}) \delta t_{a,b},$$

которое можно понять, воспользовавшись Рис. 7.1. Второе слагаемое в (7.11) соответствует результату варьирования (7.10) концов траектории.

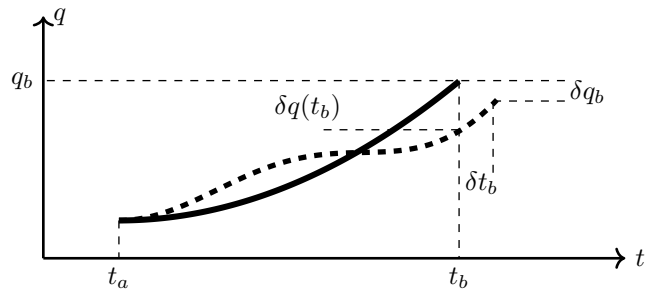


Рис. 7.1 Вариация действия с нефиксированным концом. Сплошная линия – неварьированный путь; штрихованная – варьированный.

7-2.5 Уравнение Гамильтона-Якоби

Вернёмся к уравнению (7.10). Гамильтониан в первом уравнении зависит от координаты и импульса, импульс же является частной производной действия по координате. Поэтому, полагая траекторию истинной и действие зависящим от времени, координаты начальной точки q и конечной точки q_a траектории, получаем

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H}(q, \partial S / \partial q; t) = 0 \quad (7.12)$$

Это уравнение называется *уравнением Гамильтона-Якоби* (*Hamilton-Jacobi equation*). Наша конечная цель – найти траекторию частицы, например в виде зависимости $q(t)$.

Как от параметра, функция S зависит от координаты начальной точки траектории q_a , и от начального времени t_a .

$$S = S_b(t, q; q_a) + S_a(t_a, q_a). \quad (7.13)$$

Можно сказать, что разбиение справа есть сумма действий на промежутках времени (t_0, t) и (t_a, t_0) , где t_0 – произвольное фиксированное время. Поэтому

$$\frac{\partial S}{\partial q_a} = -p_a, \quad \frac{\partial S}{\partial t_a} = E_a. \quad (7.14)$$

где p_{ai} – начальный импульс частицы, а E_a – начальная энергия в точке ‘a’; в силу уравнений движения $E_a = \mathcal{H}(t_a, q_a, p_a)$.

7-2.5.1 Несколько степеней свободы

Продолжим рассуждения, посчитав, что мы сделали прямолинейное обобщение выше изложенных рассуждений на систему с s степенями свободы. Как начальные координаты q_{ai} , так и начальные импульсы p_{ai} естественным образом не зависят от времени t – параметра

вдоль траектории движения. Поэтому $2s$ величин q_{ai}, p_{ai} являются в этом смысле интегралами движения. Ещё одним интегралом движения является начальное t_a , тогда как начальная энергия E_a определяется уже названными интегралами движения.

В силу специфики конкретной задачи, от координат q_{ai} оказывается часто удобным перейти к другому набору $\alpha_i = \alpha_i(\{q_{ai}\})$ независимых интегралов движения. Время не следует включать в аргументы α_i в силу существования разбиения (7.13), но с точки зрения уравнения Гамильтона-Якоби, сам кусок действия S_a можно считать постоянной интегрирования, зависящей как от параметров от величин α_i . Отвлекаясь теперь от смысла совокупности $\{\alpha_i, S_a\}$ как от начальных координат и времени, отметим, что с точки зрения уравнения Гамильтона-Якоби, функция S зависит от $s+1$ параметра и представима в виде разбиения (7.13), поскольку она входит в это уравнение только посредством своих частных производных.

Таким образом, алгоритм нахождения траектории системы с помощью уравнения Гамильтона-Якоби следующий. Сначала надо найти саму функцию S в виде (7.13):

$$S = f(t, q_i; \alpha_i) + A(\alpha_i). \quad (7.15)$$

Затем составить s уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad (7.16)$$

где α_i и β_i – интегралы движения, определяемые начальными условиями. Эти s уравнений позволяют вычислить зависимости s координат q как функций от времени и $2s$ интегралов движения. При желании, вместо функции f в (7.16) можно дифференцировать всю функцию S , тогда в вычислениях будет непосредственно вовлечено начальное время t_a .

§7.3. Законы сохранения

Рассмотрим любую инфинитезимально малую вариацию истинной траектории $a(t)$ системы с одой степенью свободы:

$$a' = a + \delta a, \quad (7.17)$$

С учётом уравнений движения (7.3) получаем, что при инфинитезимально малом преобразовании на траектории истинного движения изменение лагранжиана равно

$$\delta S = \int dt (L' - L), \quad L' - L = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right), \quad (7.18)$$

или в формализме Гамильтона

$$L' = L + \frac{d}{dt} (i a^* \delta a). \quad (7.18a)$$

7-3.1 Теорема Нётер

Теорема Нётер (*Noether's theorem*) утверждает, что если система обладает некоторой симметрией, выражающейся в инвариантности уравнений движения относительно некоторой группы преобразований, то система обладает сохраняющейся величиной.

При дальнейшем рассмотрении этого Пункта 7-3.1 мы предполагаем простейший вариант: у системы одна степень свободы, и её лагранжиан не зависит явно от времени. В этом случае симметрия состоит в инвариантности уравнений движения относительно сдвига по времени, а сохраняющейся величиной является энергия.

Первый способ доказательства теоремы Нётер основан на рассмотрении малой произвольной вариации

обобщённой координаты q и изложен в Пункте 7-3.1.2. Этот способ соответствует замене переменных поля в интеграле по траекториям. Пример применения замены переменных поля в интеграле по траекториям можно найти, например, в [Вергелес, 2008](#), Приложение В: Тензор энергии импульса.

Второй вариант доказательства вытекает из рассмотрения произвольной деформации временной оси, см. Пункт 7-3.1.1. Логика этого метода, применённая в полевой задаче к деформации пространственных координат, соответствует методу виртуальных перемещений. В задачах о непрерывных средах метод виртуальных перемещений обычно применяют для нахождения тензора напряжений.

Наконец, есть вывод, в котором рассматриваются совместные деформация координаты временной оси и вариация обобщённой координаты, которые будучи взяты в совокупности, непосредственно соответствуют симметрии лагранжиана. Этот вывод дан, в частности, в учебнике [Пескин и Шредер \[2001, §2.2, Теорема Нётер\]](#) и изложен в Пункте 7-3.1.3, но, по нашему мнению, является менее продуктивным.

7-3.1.1 Вывод интеграла движения через произвольную деформацию временной оси

Отталкиваясь от того факта, что уравнения движения инвариантны относительно сдвига времени, рассмотрим произвольную деформацию временной оси

$$t' = t + u(t),$$

предполагая $u(t)$ малой величиной; будем также считать, что на границе временного промежутка интегрирования $u(t)$ обращается в ноль. В этом случае получаем следующие законы преобразования величин, их первых производных и меры интегрирования по времени:

$$\begin{aligned} \partial_t &= (1 + \partial_t u) \partial_{t'}, & dt &= (1 - \partial_t u) dt', \\ f(t) &= f(t') - u \partial_{t'} f(t'), \\ \partial_t f(t) &= \partial_{t'} f(t') - u \partial_{t'}^2 f(t') \end{aligned} \quad (7.19)$$

в первом порядке по малому u (в выражении для $\partial_t a$ слагаемые, содержащие $\partial_t u$, взаимно сократились); подразумевается, что $f(t)$ и $f(t')$ – одна и та же функция, взятая, однако, от разных аргументов.

Вариация действия (7.7) при деформации временной оси (т.е. при замене переменной интегрирования) должна быть тождественно равна нулю,

$$\begin{aligned} \delta S &= - \int \left(L \dot{u} + \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} u + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} u \right) dt = \\ &= \int \left(\frac{dL}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} \right) u dt = 0. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Отметим, что на этом шаге мы использовали отсутствие явной зависимости лагранжиана от времени, и поэтому именно здесь закладывается результат – сохранение

энергии при движении. При втором варианте записи в (7.20) круглая скобка равна нулю в силу произвольности деформации u . Равенство нулю может быть интерпретировано следующим образом: первое слагаемое в скобке есть полная производная лагранжиана, которая может быть расписана через частные производные координаты и скорости (остальные слагаемые).

Теперь воспользуемся тем, что траектория $q(t)$ истинная, т.е. выполнено уравнение движения (7.3). Тогда после интегрирования по частям третьего слагаемого в круглой скобке правой части (7.20, первый вариант равенства) получим, что

$$0 = \delta S = \int dt \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L \right) \dot{u} = \int dt u \partial_t H. \quad (7.21)$$

Ввиду произвольности вариации u , приходим к тому, что производная от гамильтониана должна обращаться в ноль,

$$\partial_t H = 0,$$

т.е. полная энергия системы сохраняется.

7-3.1.2 Вывод интеграла движения через произвольную деформацию обобщённой координаты

Рассмотрим другой способ, основанный на вариации обобщённой координаты на истинной траектории. Пусть вариация координаты равна

$$q \rightarrow q + u\dot{q}, \quad \dot{q} \rightarrow \dot{q} + \partial_t(u\dot{q}). \quad (7.22)$$

Заметим, что вариация q соответствует (7.19), тогда как вариация $\dot{q}$ уже другая: она получается непосредственным дифференцированием по времени вариации q . Величина u предполагается малой и обращающейся в ноль на границе временного промежутка интегрирования, а в остальном произвольная. Вариации действия и лагранжиана на истинной траектории суть

$$\begin{aligned} \delta S &= \int dt \delta L = 0, & \delta L &= \frac{\partial L}{\partial q} u\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \partial_t(u\dot{q}) = \\ &= u \left(\frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} \right) + p\dot{q} \partial_t u = u \frac{dL}{dt} + p\dot{q} \partial_t u. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Мы воспользовались тем, что лагранжиан не зависит явно от времени, поэтому

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q}.$$

Теперь проведём интегрирование по частям во втором представлении вариации лагранжиана в (7.23). В результате мы получим, что вариация действия (7.7) равна тому же выражению (7.21), взятым с противоположным знаком.

Пусть теперь лагранжиан не зависит явно от обобщённой координаты q . В этом случае сохраняющейся величиной является также и канонический импульс. Покажем это. Вариацию координаты теперь возьмём в виде,

соответствующему сдвигу по координате, а не по времени, как это было в (7.22). В результате вариация координаты и действия равны

$$\delta q = \partial_t u(t), \quad \delta S = \int p du = - \int \partial_t p u dt, \quad (7.24)$$

т.е. импульс сохраняется,

$$\partial_t p = 0.$$

7-3.1.3 Однопараметрическое семейство решений

Предположим, что для любой истинной траектории движения системы $q(t)$ (и $p(t)$), если запись ведётся в формализме Гамильтона) существует семейство других истинных траекторий, задаваемых параметром α :

$$q'(t) = q'(q, \alpha), \quad p'(t) = p'(q, \alpha), \quad (7.25)$$

$$\text{или } a'(t) = a'(a, \alpha)$$

в терминах переменной $a(t)$. Для определённости мы полагаем, что если параметр $\alpha = 0$, то преобразование является тождественным, т.е. преобразованный путь совпадает с исходным.

Все траектории (7.25) являются решением (7.4е). Поэтому при преобразовании (7.25), в частности, при преобразовании (7.17), лагранжиан L в (7.7) изменяется на полный дифференциал по времени,

$$\delta S = \int dt (L' - L), \quad L' - L = \frac{dJ(\alpha)}{dt}, \quad (7.26)$$

поскольку вариация преобразованного действия должна приводить к траектории (7.25).

Теперь покажем, что существование семейства решений (7.25) означает, что при движении системы сохраняется некоторая величина I . Действительно, поскольку выражения (7.26) и (7.18) были получены непосредственно (без применения операции интегрирования по частям), то поправка к лагранжиану (7.26) при $\alpha \rightarrow 0$ равна аналогичной поправке (7.18). В результате получаем

$$\frac{dI}{dt} = 0, \quad I = \partial_\alpha (ia^* \delta a - J) \big|_{\alpha=0}, \quad (7.27)$$

где вариация пути δa соответствует параметрическому семейству (7.25),

$$\delta a = \alpha \partial_\alpha a'(t, \alpha) \big|_{\alpha=0}.$$

Таким образом, для того, чтобы иметь возможность найти интеграл движения I , необходимо уметь вычислять величину J в (7.26), а точнее – величину $\partial_\alpha J \big|_{\alpha=0}$ в (7.27).

Рассмотрим тот же элементарный пример закона сохранения энергии для системы с одной степенью свободы. Если лагранжиан системы (вместе с ним и гамильтониан) не зависит явно от времени, то из существования решения $a(t)$ следует существование решения

$$a'(t) = a(t + \alpha).$$

В этом случае величина J , введённая в (7.26) и необходимая нам в виде (7.27), равна

$$\delta a = \alpha \dot{a}, \quad \partial_\alpha J \big|_{\alpha=0} = L.$$

Используя (7.7) получаем, что сохраняющаяся величина I в (7.27) есть гамильтониан, $I = H$.

Часть III

APPENDIX

Глава 8

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

1	Тензорное исчисление.....	99
1.	Контравариантные и ковариантные вектора	99
2.	Метрика	100
3.	Полностью антисимметричный псевдотензор	101
4.	Тензорные поля	102
2	Евклидово пространство.....	102
1.	Скалярное произведение векторов	102
2.	Аксиальный вектор в 3-х мерном пространстве	103
3.	Задачи	104
3	Пространство Минковского.....	104
1.	Антисимметричный тензор второго ранга	104
2.	Операции поднятия и опускания индексов	105

§8.1. Тензорное исчисление

Рекомендуемая дополнительная литература: [Корнев, 2000](#).

Рассмотрим линейное d -мерное пространство $\mathcal{L}$ над полем действительных чисел. Каждый вектор $\mathbf{x}$ этого линейного пространства может быть представлен в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 x^1 + \dots + \mathbf{e}_d x^d \equiv \mathbf{e}_\mu x^\mu, \quad (8.1)$$

где индекс μ пробегает значения $\{1, \dots, d\}$, $\mathbf{e}_\mu$ — базисные вектора некоторого базиса в этом линейном пространстве, x^μ — набор вещественных чисел, которые мы будем называть координатами вектора $\mathbf{x}$. Равенство (8.1) переписано второй раз с использованием соглашения Эйнштейна (*Einstein notation or Einstein summation convention*). Это соглашение заключается в том, что если в выражении дважды повторяется индекс, записанный вверху и внизу, то подразумевается суммирование по всем допустимым значениям этого индекса, если не оговорено противного. Эта операция суммирования называется также *свёрткой*.

Предположим, что мы производим линейное преобразование базиса. Это означает, что мы переходим от старого базиса $\mathbf{e}_\mu$ к новому $\mathbf{e}'_\nu$ согласно правилу, задающемуся некоторой матрицей $\mathcal{D}_\nu$ размерности dx^d :

$$\mathbf{e}'_\nu = \mathcal{D}^\mu_{\nu} \mathbf{e}_\mu. \quad (8.2)$$

где по повторяющемуся индексу μ согласно соглашению Эйнштейна производится суммирование от 1 до d . Набор векторов $\mathbf{e}'_\mu$ является базисом в том случае, если детерминант $\mathcal{D}_\nu$ не ноль, то есть матрица не вырождена. Мы всегда будем это предполагать.

В новом базисе вектор $\mathbf{x}$ имеет координаты x'^μ , которые связаны с координатами в старом базисе через обратную матрицу $\mathcal{D}'$:

$$x'^\mu = \mathcal{D}'^\mu_{\nu} x^\nu, \quad \mathcal{D}'^\mu_{\nu} \mathcal{D}^\lambda_{\mu} = \delta^\lambda_{\nu}. \quad (8.3)$$

Здесь δ^λ_{ν} — символ Кронекера (*Kronecker symbol*), равный единице, если значения его индексов совпадают (в данном случае если $\lambda = \nu$), и нулю в противном случае. Матрица перехода есть матрица Якоби линейного преобразования координат,

$$\mathcal{D}'^\mu_{\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}, \quad \mathcal{D}^\mu_{\lambda} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda}. \quad (8.4)$$

Вектор $\mathbf{x}$ становится осязаемым только в случае, если заданы его координаты x^μ . Поэтому более практичным определением вектора является следующее: совокупность d чисел x^μ называют вектором, если при переходе от одного базиса к другому (мы будем говорить о том же самом как о переходе от одной системы координат к другой) этот набор преобразуется по закону (8.3).

8-1.1 Контравариантные и ковариантные вектора

Вектора, преобразующиеся по закону (8.3), называют *контравариантными векторами*. Более общо, вектор x^μ называют тензором первого ранга типа (0,1).

По определению, тензора второго ранга типа (0,2) являются элементами линейного пространства размерности d^2 , мы будем их обозначать как $F^{\mu\nu}$, $M^{\mu\nu}$, $T^{\mu\nu}$:

каждый индекс пробегает по-прежнему d значений, поэтому всего матричных элементов у тензора второго ранга оказывается как раз d^2 штук. Пример тензора $F^{\mu\nu}$ можно построить из двух векторов (т.е. тензоров первого ранга типа $(0,1)$) путём их прямого произведения,

$$F^{\mu\nu} = x^\mu y^\nu; \quad \text{пусть например} \quad T^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} + M^{\mu\nu}. \quad (8.5)$$

В общем случае произвольный тензор второго ранга $T^{\mu\nu}$ невозможно представить в виде произведения двух векторов (8.5), как это сделано для $F^{\mu\nu}$, поскольку в $T^{\mu\nu}$ содержится d^2 независимых параметров, тогда как в двух векторах независимых параметров всего $2d$. Тем не менее, построение (8.5) показывает, что для тензора второго ранга при смене базиса должно иметь место правило преобразования

$$F'^{\mu\nu} = D_\rho^\mu D_\lambda^\nu F^{\rho\lambda}. \quad (8.6)$$

8-1.1.1 Ковариантные тензора

Рассмотрим линейные функции на векторах: каждому вектору такая функция ставит в соответствие число. Такие функции образуют линейное пространство $\mathcal{L}^*$ размерности d , его элементы называют ковариантными векторами. Если в пространстве $\mathcal{L}$ выбран базис, так что любой контравариантный вектор $\mathbf{x}$ определяется набором d чисел x^μ , то ковариантный вектор $\alpha \in \mathcal{L}^*$ определяется набором d чисел α_μ , так что его действие на векторе $\mathbf{x}$ равно

$$\alpha(\mathbf{x}) = \alpha_\mu x^\mu. \quad (8.7)$$

Это число не должно зависеть от выбранного базиса. Из (8.3) вытекает, что при преобразовании базиса этот набор преобразуется по правилу

$$\alpha'_\mu = D_{\mu}^\nu \alpha_\nu. \quad (8.8)$$

совпадающему с правилом (8.2) для величины также с нижним индексом.

Набор d величин, преобразующихся по закону (8.7), называют *ковариантными векторами* (или, тензорами первого ранга типа $(1,0)$), в отличие от контравариантных векторов.

По аналогии с тем, как был построен тензор второго ранга типа $(0,2)$, можно построить тензор второго ранга типа $(2,0)$ по правилу

$$H_{\sigma\varsigma} = \alpha_\sigma \beta_\varsigma, \quad H'_{\sigma\varsigma} = D_{\sigma}^\nu D_{\varsigma}^\mu H_{\mu\nu}. \quad (8.9)$$

Далее, можно построить и тензор второго ранга смешанного типа $(1,1)$, согласно правилу

$$J^\sigma_\varsigma = x^\sigma \beta_\varsigma, \quad J'^\sigma_\varsigma = D_\nu^\sigma D_\varsigma^\mu J^\nu_\mu. \quad (8.10)$$

Как $H_{\sigma\varsigma}$, так и J^σ_ς являются элементами (разных) линейных пространств размерности d^2 .

Вообще, величины, имеющие более одного индекса, и преобразующиеся по законам типа (8.6,8.9,8.10), называются тензорами ранга, равного сумме количеств верхних (контравариантных) и нижних (ковариантных) индексов. Расширение описанных правил на тензора более высокого ранга прямолинейно.

8-1.1.2 Скаляры

Скаляром называют величину, значение которой не зависит от выбранного базиса. Таким образом, действие ковариантного вектора на контравариантном векторе есть скаляр. Другим примером построения скаляра является след тензора второго ранга типа $(1,1)$:

$$\varphi = F^\mu_\mu.$$

Формально, скаляр является тензором нулевого ранга.

8-1.2 Метрика

Определим невырожденную квадратичную форму g , называемую *метрикой*, которая каждой паре векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ставит в соответствие число, называемое *скалярным произведением*,

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \equiv g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu, \quad g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}, \quad (8.11)$$

где $g_{\mu\nu}$ — совокупность $d(d-1)/2$ чисел, определяющих квадратичную форму g в данном базисе. Скалярное произведение $g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$ по нашей задумке должно зависеть только от выбранных метрики и векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, но не должно зависеть от выбранной системы координат (выбранного базиса). Таким образом, метрика является тензором типа $(2,0)$, и потому преобразуется согласно правилу

$$g'_{\mu\nu} = D_{\mu}^\rho D_{\nu}^\lambda g_{\rho\lambda}, \quad (8.12)$$

сравни с (8.9).

Метрика является выделенным невырожденным симметричным ковариантным тензором второго ранга (типа $(2,0)$). Если введена метрика, то устанавливается взаимно-однозначное соответствие между контравариантными и ковариантными тензорами. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ — вектора линейного пространства $\mathcal{L}$. Каждому контравариантному вектору x^μ можно поставить во взаимно однозначное соответствие ковариантный вектор x_μ , являющийся линейной функцией на $\mathcal{L}$, см. определение (8.7), по правилам

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu, \quad x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu, \quad (8.13)$$

$$g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x_\mu y^\mu = x^\mu y_\mu, \quad \|g^{\mu\nu}\| = \|g_{\mu\nu}\|^{-1}.$$

Мы ввели матрицу, обратную матрице метрического тензора. Обратный метрический тензор $g^{\mu\nu}$ преобразуется по закону (8.6). Операции первой строчки (8.13) называют *операциями опускания и поднятия индекса*.

Процедуры поднятия и опускания индекса распространяются на тензора всех рангов. Например, тензору

$F^\mu{}_\nu$ можно поставить в соответствие тензора $F^{\mu\nu}$ и $F_{\mu\nu}$, проведя операции поднятия и опускания индекса согласно (8.13):

$$F^{\mu\nu} = g^{\nu\lambda} F^\mu{}_\lambda, \quad F_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda} F^\lambda{}_\nu.$$

Построенные величины будут преобразовываться по правилам (8.6) и (8.9) соответственно. Поскольку взаимное соответствие всех трёх тензоров однозначно, о них всех вместе взятых говорят просто как о тензоре F .

8-1.2.1 Пример метрики: евклидово пространство

В качестве первого примера метрики рассмотрим евклидово пространство. *Евклидово пространство* (*Euclidean space*) — это линейное пространство с введённой на нём метрикой такой, что существует базис $\mathbf{e}$, в котором метрика в матричном представлении является единичной матрицей,

$$\|g_{ik}\| = \text{diag}(1, \dots, 1), \quad \Leftrightarrow \quad g_{ik} = \delta_{ik}. \quad (8.14)$$

Вместо индексов из букв греческого алфавита $\{\mu, \nu, \lambda, \dots\}$ мы используем индексы из букв латинского алфавита $\{i, j, k, l, \dots\}$, если речь идёт о евклидовом пространстве с введённым базисом, где метрика имеет канонический вид (8.14).

В евклидовом пространстве действие метрики как квадратичной формы для двух векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ представляет из себя известное в физике скалярное произведение:

$$g_{ik} x^i x^k \equiv (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^d x^i y^i. \quad (8.15)$$

В евклидовом пространстве существует целое множество базисов, в которых метрика является единичной матрицей. Все такие базисы называются (*прямоугольными*) *Декартовыми системами координат* (*Cartesian coordinate system*). Переход от одного базиса к другому производится с помощью ортогональной матрицы,

$$x'^i = \mathcal{O}^i{}_k x^k, \quad \mathcal{O}^i{}_k \mathcal{O}^l{}_k = \mathcal{O}^k{}_i \mathcal{O}^k{}_l = \delta^{il}. \quad (8.16)$$

Для того, чтобы отличать ортогональную матрицу от произвольной матрицы перехода, мы обозначили её $\mathcal{O}$, так что $\mathcal{D}' \equiv \mathcal{O}$. Для ортогональной матрицы равенство (8.8) сохраняет метрику (8.14).

Для евклидова пространства допускается нарушение соглашения Эйнштейна в том смысле, что повторяющиеся индексы, по которым происходит суммирование, могут одновременно быть нижними или верхними. Причина состоит в том, что тензора с верхними и нижними индексами не отличаются друг от друга, см. Пункт 8-1.1.

8-1.2.2 Пример метрики: пространство Минковского

Пространство Минковского (*Minkowski space or Minkowski spacetime*) — это 4-х мерное линейное пространство с введённой на нём метрикой, такой, что

существует базис $\mathbf{e}$, в котором метрика в матричном представлении имеет вид

$$\|g_{\mu\nu}\| = \text{diag}(1, -1, -1, \dots, -1), \quad (8.17)$$

то есть метрика диагональна, первый элемент равен 1, а все остальные -1 . Все такие базисы мы будем также называть (*прямоугольными*) *Декартовыми системами координат*.

Если рассматривается пространство Минковского, то для индексов принято производить счёт начиная с нуля, так что $\{\mu, \nu, \dots\} = \{0, 1, \dots, d-1\}$. В соответствии с физическим смыслом, нулевая компонента называется также временной компонентой, а остальные компоненты — пространственными. Если есть желание выделить пространственные компоненты, то используют индексы из букв латинского алфавита $\{i, j, k, \dots\}$.

В пространстве Минковского действие метрики как квадратичной формы имеет вид

$$g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^0 y^0 - \sum_{i=1}^{d-1} x^i y^i \equiv x^0 y^0 - x^i y^i. \quad (8.18)$$

Матрицу преобразования $\mathcal{D}'$, которая сохраняет метрику (8.17), мы будем обозначать символом Λ' и называть матрицей преобразования Лоренца, а само преобразование — преобразованием Лоренца. Таким образом, если Λ' — матрица преобразования Лоренца и метрика g есть метрика Минковского (8.17), то

$$g_{\mu\nu} = \Lambda'^\lambda{}_\mu \Lambda'^\rho{}_\nu g_{\lambda\rho}. \quad (8.19)$$

8-1.3 Полностью антисимметричный псевдотензор

Символ Леви-Чивиты ϵ (*Levi-Civita symbol*) для d -мерного пространства имеет d индексов. Не имеет значения, называть их верхними или нижними, поскольку символ Леви-Чивиты не является тензором. По определению, его матричный элемент

$$\epsilon_{12\dots d} = 1. \quad (8.20)$$

в любой системе отсчёта. При перестановке любых двух индексов значение символа меняет знак. Таким образом, в частности, если значение хоть одной пары его индексов совпадает, то соответствующий матричный элемент символа равен нулю.

Покажем, что величина $\mathfrak{E}$, определённая согласно равенству

$$\mathfrak{E}_{\mu\dots\nu} = \sqrt{|g|} \epsilon_{\mu\dots\nu}, \quad g = \det \|g_{\lambda\rho}\| \quad (8.21)$$

является *псевдотензором*. Псевдотензором в общем случае мы называем объект, который ведёт себя как тензор какого-либо ранга и в дополнение к этому меняет знак, если детерминант матрицы перехода $\mathcal{D}'$ отрицателен. Величину (8.21) мы будем называть полностью антисимметричным псевдотензором.

Действительно, посмотрим как совокупность величин (8.21) преобразуется при переходе из одной системы координат в другую, если считать её тензором ранга $(0, d)$:

$$\mathfrak{E}'_{\mu\dots\nu} \rightarrow D_{l\mu}^{\rho} \dots D_{l\nu}^{\lambda} \mathfrak{E}_{\rho\dots\lambda} = \sqrt{|g|} D_{l\mu}^{\rho} \dots D_{l\nu}^{\lambda} \epsilon_{\rho\dots\lambda}.$$

Свертка символа Леви-Чивиты с d матрицами D_l есть детерминант этой матрицы помноженный на символ Леви-Чивиты (для доказательства следует сопоставить определения детерминанта и символа Леви-Чивиты). С другой стороны, поскольку преобразованная метрика — см. правую часть (8.12) — представляет из себя произведение трёх матриц D_l , $\|g_{\mu\nu}\|$ и снова D_l , то

$$\det \|g'_{\mu\nu}\| = (\det D_l)^2 \det \|g_{\mu\nu}\|.$$

В итоге получаем, что

$$\mathfrak{E}'_{\mu\dots\nu} \rightarrow \sqrt{|g|} \det D_l \epsilon_{\mu\dots\nu} = \text{sign}(\det D_l) \sqrt{|g'|} \epsilon_{\mu\dots\nu}. \quad (8.22)$$

Таким образом, если детерминант матрицы перехода $\det D_l$ положителен, то преобразование $\mathfrak{E}$ как тензора типа $(d, 0)$ согласуется с его определением (8.21). Если же детерминант матрицы перехода отрицателен, результат преобразования по правилу тензора отличается от определения (8.21) знаком. В соответствии с определением (8.21), в этом случае при переходе в новую систему координат $\mathfrak{E}$ меняет знак в добавок к преобразованию по типу тензора $(d, 0)$.

Действуя аналогично можно показать, что полностью антисимметричный псевдотензор с верхними ин-

дексами равен

$$\mathfrak{E}^{\mu\dots\nu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \epsilon^{\mu\dots\nu}. \quad (8.23)$$

Любое произведение полностью антисимметричного псевдотензора на просто тензор (по схеме (8.5)) есть псевдотензор. Произведение двух псевдотензоров есть просто тензор.

8-1.4 Тензорные поля

Пусть $\varphi(\mathbf{x})$ — некоторое скалярное поле, определённое на линейном пространстве $\mathcal{L}$ (8.1). Совокупность d величин

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu \varphi \quad (8.24)$$

является ковариантным векторным полем. Это означает, что при переходе в новую систему координат совокупность $\|\partial_\mu \varphi\|$ по всех точках пространства $\mathcal{L}$ преобразуется согласно (8.8):

$$\partial_\mu \varphi \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \partial_\lambda \varphi = D_{\mu}^{\lambda} \partial_\lambda \varphi, \quad (8.25)$$

смотри (8.4).

Можно определить тензорное поле любого ранга. Дифференцирование такого тензорного поля по координатам производит новое тензорное поле на один ранг выше, с добавлением одного нижнего индекса.

§8.2. Евклидово пространство

Рассмотрим евклидово пространство и базис в нём такой, что в этом базисе метрика является единичной матрицей, см. Пункт 8-1.2.1:

$$g_{ik} = \delta_{ik}. \quad (8.26)$$

В этом случае базис называется *Декартовой системой координат* (*Cartesian coordinate system*). Переход во все другие Декартовы системы координат осуществляется с помощью ортогональных преобразований. Если в системе K у вектора $\mathbf{x}$ были координаты x^k , то в системе K' координаты этого вектора

$$x'^i = \mathcal{O}^i_k x^k, \quad \mathcal{O}^k_i \mathcal{O}^l_k = \delta_{il}. \quad (8.27)$$

Здесь матрица $\mathcal{O}$ — матрица ортогонального поворота; второе равенство в (8.27) представляет из себя условие на то, чтобы матрица $\mathcal{O}$ была ортогональной. В дальнейшем мы в этом параграфе будем рассматривать только ортогональные переходы от одного базиса к другому.

В евклидовом пространстве компоненты ковариантного вектора совпадают с компонентами контравари-

антного вектора, см. (8.13), поэтому нет смысла различать нижние и верхние индексы. Соглашение Эйнштейна, таким образом, не требует, чтобы два повторяющихся индекса, по которым производится суммирование, были один сверху, а другой сверху. Они могут быть на любых позициях. Обозначая вектора в евклидовом пространстве, мы, тем не менее, будем по возможности писать их индексы сверху.

8-2.1 Скалярное произведение векторов

Здесь мы частично повторяем то, что было сказано в Пункте 8-1.2.1.

Скалярное произведение $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ в евклидовом пространстве двух векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ в декартовой системе координат определяется как

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = a^i b^i. \quad (8.28)$$

Наоборот, если скалярное произведение в евклидовом пространстве (которое не зависит от системы отсчёта)

В некоторой системе координат определяется согласно (8.28), то эта система отсчёта называется декартовой.

Модуль вектора, определённый согласно равенству

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})} \quad (8.29)$$

в евклидовом пространстве обладает свойством нормы, то есть выполняются неравенство треугольника и линейное свойство:

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|, \quad |\varphi \mathbf{a}| = |\varphi| |\mathbf{a}|, \quad |\mathbf{a}| \geq 0,$$

где φ — действительное число.

8-2.2 Аксиальный вектор в 3-х мерном пространстве

В этом Пункте мы рассматриваем трёхмерное пространство, то есть $d = 3$.

Сперва отметим, что поскольку метрика у нас является единичной матрицей, и мы рассматривает только ортогональные преобразования, то антисимметричный псевдотензор совпадает с символом Леви-Чивиты,

$$\mathfrak{E}_{ikl} = \epsilon_{ikl},$$

см. Пункт 8-1.3.

Рассмотрим антисимметричный тензор второго ранга V^{ik} :

$$V^{ik} = -V^{ki}.$$

Поскольку мы рассматривает 3-х мерное пространство, то у такого тензора имеется всего три независимые компоненты. Поставим этому тензору в соответствие псевдо-вектор

$$V^n = \frac{1}{2} \epsilon_{nik} V^{ik}, \quad V^{ik} = \epsilon_{ikn} V^n. \quad (8.30)$$

Псевдо-вектора также называют *аксиальными векторами* (*pseudovector or axial vector*), в отличие от обычных векторов, которые называют *истинными или полярными векторами* (*true or polar vector*). Аксиальные вектора преобразуются также, как и радиальные, если ортогональное преобразование содержит в себе только ортогональный поворот. Если же ортогональное преобразование содержит в себе также операцию пространственной инверсии, то аксиальный вектор вдобавок меняет знак.

В матричном виде связь компонент тензора V^{ik} и аксиального вектора V^n выглядит следующим образом:

$$\|V^{ik}\| = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} 0 & V^z & -V^y \\ -V^z & 0 & V^x \\ V^y & -V^x & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.31)$$

Ещё раз подчеркнём, что если в составе ортогонального преобразования нет операции инверсии, то закон преобразования (8.12), применённый для тензора V^{ik} эквивалентен преобразованию (8.3) для аксиального вектора V^i .

8-2.2.1 Векторное произведение

Пусть нам даны два радиальных вектора a^i и b^i . Поставим им в соответствие аксиальный вектор d^i

$$d^i = \epsilon_{ikl} a^k b^l, \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{d} = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]. \quad (8.32)$$

Вектор $\mathbf{d}$ называется *векторным произведением* векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (*cross product of $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$*). Если среди векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ один радиальный, а другой аксиальный, то их векторное произведение будет радиальным вектором. В силу свойств символа Леви-Чивиты, получаем следующие свойства векторного произведения

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = -[\mathbf{b} \times \mathbf{a}], \quad d^x = a^y b^z - a^z b^y. \quad (8.33)$$

Выражения для остальных компонент вектора $\mathbf{d}$ можно получить путём циклической перестановки индексов.

Вектор $\mathbf{d}$ направлен ортогонально плоскости, образуемой векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Действительно, скалярные произведения

$$(\mathbf{d} \cdot \mathbf{a}) = \epsilon_{ikl} a^i a^k b^l = 0, \quad (\mathbf{d} \cdot \mathbf{b}) = 0 \quad (8.34)$$

в силу антисимметричности символа Леви-Чивиты. Модуль вектора $\mathbf{d}$ равен произведению модулей векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ помноженного на модуль синуса угла между ними — это есть площадь параллелограмма, натянутого на вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

Рассмотрим симметричные свойства векторного произведения, продемонстрировав редукцию общих правил обращения с псевдо-тензорами на трёх-мерный случай. Совершим операцию инверсии осей координат P , в результате которой координаты истинных векторов изменят свой знак:

$$P: \quad \mathbf{a} \rightarrow -\mathbf{a}, \quad \mathbf{b} \rightarrow -\mathbf{b}.$$

Тензор $c^{ik} = a^i b^k - a^k b^i$, составленный по правилу (8.30), при операции инверсии не изменяет своего знака. По определению, векторное произведение (8.32) всегда использует символ Леви-Чивиты с фиксированными знаками матричных элементов. В результате компоненты аксиального вектора $\mathbf{c}$ не изменят свой знак,

$$P: \quad \mathbf{c} \rightarrow \mathbf{c}.$$

Полученное правило можно прокомментировать следующим образом. Ортогональная матрица $\hat{O}_P$, соответствующая операции инверсии P , имеет матричные элементы $\mathcal{O}_P^{ik} = -\delta^{ik}$. Детерминант такой матрицы отрицателен, $\det \hat{O}_P = -1$. Согласно Пункту 8-1.3 (в частности, см. равенство (8.22)), применение к символу Леви-Чивиты ϵ^{ikl} правила преобразования для тензора 3го порядка привело бы к замене $\epsilon_{ikl} \rightarrow -\epsilon_{ikl}$. Однако, поскольку мы этой замены не делаем, то аксиальный вектор $\mathbf{c}$ знака не меняет.

8-2.2.2 Смешанное произведение

Смешанное произведение ϕ трёх векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ (*scalar triple product*) по определению есть

$$\phi = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}) \equiv \epsilon_{ikl} a^i b^k c^l = (\mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]). \quad (8.35)$$

В силу свойств символа Леви-Чивиты, смешанное произведение обладает симметриями перестановок

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{c}), \quad (8.36)$$

то есть, вслед за символом Леви-Чивиты, смешанное произведение меняет знак при перестановке любых двух

векторов. Модуль смешанного произведения равен объёму параллелепипеда, натянутого на вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

8-2.3 Задачи

• **Задача 1:** Пусть $B^{ik} = \epsilon_{ikl} B^l$. Покажите, что векторное произведение $[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$ есть то же самое, что результат действия на вектор $\mathbf{v}$ антисимметричной матрицы $\hat{B}$, $[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = \hat{B}\mathbf{v}$.

§8.3. Пространство Минковского

Рассмотрим более подробно свойства 4-х мерного пространства Минковского, см. Пункт 8-1.2.2. В качестве преобразований базиса мы здесь рассматриваем только преобразования Лоренца.

8-3.0.1 Обозначения этого параграфа

Пусть нам дан 4-вектор A^μ , нулевая компонента которого равна φ , а пространственные компоненты составляет трёхмерный вектор $\mathbf{A}$. Коротко мы это будем записывать как

$$\|A^\mu\| = \{\varphi, \mathbf{A}\}.$$

В физике тензор электромагнитного поля и момент импульса представляют из себя антисимметричные тензора второго ранга. Мы будем рассматривать тензор $F^{\mu\nu}$,

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}.$$

У такого тензора имеется всего 6 независимых матричных элементов.

Наконец, физический интерес представляют также симметричные тензора второго ранга, примером которого является тензор энергии импульса $T^{\mu\nu}$:

$$\|T^{\mu\nu}\| = \begin{pmatrix} T^{00} & \mathbf{S}^T \\ \mathbf{S} & -\hat{\sigma} \end{pmatrix} \quad (8.37)$$

где $\mathbf{S}$ — 3-х мерный вектор-столбец, а $\hat{\sigma}$ — матрица 3×3 .

8-3.0.2 Ортогональный поворот

Пусть системы K и K' неподвижны друг относительно друга, однако их пространственные оси повернуты относительно друг друга. Таким образом, преобразование координат ограничивается преобразованием пространственных координат матрицей ортогонального поворота $\hat{O}$ размерности 3×3 . Матрица Лоренца в этом случае имеет вид

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \hat{O} \end{pmatrix} \quad (8.38)$$

где $\vec{0}$ — столбец из трёх нулей, а $\vec{0}^T$ — соответственно, строка из трёх нулей.

8-3.1 Антисимметричный тензор второго ранга

Исследуем математические свойства антисимметричного тензора второго ранга $F^{\mu\nu}$. Представим его в виде

$$\begin{aligned} \|F^{\mu\nu}\| &= \downarrow_{\mu} \begin{pmatrix} 0 & -E^j \\ E^i & -\epsilon_{ijk} B^k \end{pmatrix} = \begin{matrix} \mu = i \\ \nu = j \end{matrix} \\ &= \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ \hline E^x & 0 & -B^z & B^y \\ E^y & B^z & 0 & -B^x \\ E^z & -B^y & B^x & 0 \end{array} \right). \end{aligned} \quad (8.39)$$

Покажем, что величины $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ ведут себя как полярный и аксиальный вектора в трёхмерном пространстве. Для этого произведём преобразование Лоренца (8.38), по сути сводящееся к ортогональному преобразованию в пространстве. Получаем следующий закон преобразования набора величин E^k :

$$E'^i = F'^{i0} = \Lambda_{\mu}^i \Lambda_{\nu}^0 F^{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}^i F^{\mu 0} = \mathcal{O}^i_k E^k$$

Мы учли то, что и у самого тензора F , и у матрицы преобразования Лоренца Λ есть нулевые элементы и отбросили соответствующие нулевые слагаемые. Таким образом, действительно, величины E^k при ортогональном повороте ведут себя как компоненты 3-х мерного вектора. Закон преобразования величин B^k описан в Пункте 8-2.2. В терминах этого пункта $B^{ik} = -F^{ik}$, для которого закон преобразования определяется ортогональной матрицей $\mathcal{O}$:

$$\begin{aligned} B'^{ik} &= -\Lambda_{\mu}^i \Lambda_{\nu}^k F^{\mu\nu} = -\Lambda_{\mu}^i \Lambda_{\nu}^k F^{lm} = \\ &= \mathcal{O}^i_l \mathcal{O}^k_m B^{lm}. \end{aligned}$$

Из выводов Пункта 8-2.2 следует, что величины V^k , действительно, образуют трёхмерный аксиальный вектор.

Антисимметричный тензор называют *би-вектором* и равенство (8.39) кратко записывают как

$$\|F^{\mu\nu}\| = (-\mathbf{E}, -\mathbf{B}). \quad (8.40)$$

8-3.1.1 Дуальный антисимметричный тензор

Если дан антисимметричный тензор второго ранга $F^{\mu\nu}$ (8.40), то можно построить дуальный ему антисимметричный псевдо-тензор второго ранга $\tilde{F}^{\mu\nu}$ по правилу

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma}, \quad \|\tilde{F}^{\mu\nu}\| = (-\mathbf{B}, \mathbf{E}). \quad (8.41)$$

Величина $\tilde{F}^{\mu\nu}$ называется псевдо-тензором, поскольку меняет знак при операции пространственной инверсии, см. Пункт 8-1.3.

8-3.2 Операции поднятия и опускания индексов

Используя явный вид метрики пространства Минковского (8.17), можно получить связь компонент контра-

вариантного и ковариантного тензора одной и той же величины, см. общую формулу (8.13). Поскольку метрика диагональна и на диагонали стоит только ± 1 , то изменение матричных элементов при опускании или поднятии индекса должно сводиться только к изменению или сохранению знака этого элемента.

Для 4-вектора получаем:

$$\|A^\mu\| = \{\varphi, \mathbf{A}\}. \quad \Leftrightarrow \quad \|A_\mu\| = \{\varphi, -\mathbf{A}\}.$$

Для компонент антисимметричного тензора второго ранга при опускании индекса меняет знак только радиальный вектор,

$$\|F^{\mu\nu}\| = (-\mathbf{E}, -\mathbf{B}), \quad \Leftrightarrow \quad \|F_{\mu\nu}\| = (\mathbf{E}, -\mathbf{B}).$$

Наконец, для симметричного тензора (8.37) с нижними индексами получаем, что знак меняют только пространственно-временные компоненты,

$$\|T_{\mu\nu}\| = \begin{pmatrix} T^{00} & -\mathbf{S}^T \\ -\mathbf{S} & -\hat{\sigma} \end{pmatrix}.$$

Глава 9

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ

1	Криволинейные координаты, вложенные в евклидово пространство	106
1.	Ковариантная производная	106
2.	Операции интегрирования и векторного дифференцирования	107
3.	Двумерная поверхность, вложенная в трёх-мерное пространство	108

§9.1. Криволинейные координаты, вложенные в евклидово пространство

Рассмотрим d -мерное евклидово пространство или пространство Минковского с системой координат r^i , $\{i, j, k, \dots\} = 1, \dots, d$, в которой метрический тензор имеет канонический вид – он имеет диагональный вид и его диагональные элементы равны ± 1 . Мы будем считать, что сначала идут 1, а потом -1 в порядке возрастания номера индекса; в таком случае мы будем обозначать метрический тензор

$$g_{ik} = \eta_{ik}. \quad (9.1)$$

Эту систему мы будем называть канонической прямолинейной системой координат.

Пусть также в этом пространстве определена некоторая криволинейная система координат ξ^μ , $\{\mu, \nu, \lambda, \dots\} = 1, \dots, d$. Техника дифференциальной геометрии позволяет обобщать запись векторных и тензорных равенств, сформулированных исходно чаще всего в канонической прямолинейной системе координат, на криволинейные координаты.

Криволинейная система координат в каждой точке задаёт базис с базисными векторами, являющимися касательными к координатным линиям этой системы координат. Матрицы перехода для тензоров от декартовой к криволинейной системе координат и обратно

$$\mathcal{D}_i^\mu = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial r^i} \equiv \partial_i \xi^\mu, \quad \mathcal{D}_\mu^i = \frac{\partial r^i}{\partial \xi^\mu} \equiv \partial_\mu r^i, \quad \mathcal{D}_i^\mu \mathcal{D}_\mu^k = \delta_{ik}. \quad (9.2)$$

Произвольные векторные поля $\mathbf{v} = \|v^i(\mathbf{r})\|$ и $\mathbf{w} = \|w^i(\mathbf{r})\|$, записанные в декартовых координатах, переписываются в криволинейных координатах согласно правилу

$$v^\mu(\xi) = \mathcal{D}_i^\mu v^i, \quad v_\mu(\xi) = \mathcal{D}_\mu^i v_i. \quad (9.3)$$

Для базиса $\partial_\mu r^i$ справедливы все рассуждения § 1. Метрический тензор (metric tensor)

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = \mathcal{D}_\mu^i \eta_{ik} \mathcal{D}_\nu^k, \quad g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu} = \mathcal{D}_\mu^i \eta^{ik} \mathcal{D}_\nu^k = \delta_\mu^\nu, \quad (9.4)$$

так что скалярное произведение двух полей v^i и w^i в криволинейных координатах записывается в виде свёртки по нижнему и верхнему индексам:

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \eta_{ik} v^i w^k = g_{\mu\nu} v^\mu w^\nu.$$

Метрический тензор $g_{\mu\nu}$ содержит полную информацию о соотношении малых приращений криволинейных координат с расстоянием, площадью и объёмом в прямолинейной системе координат. В частности, элемент объёма

$$d\Omega \equiv d^d r = \sqrt{|g|} d^d \xi, \quad g = \det \|g_{\mu\nu}\|,$$

а квадрат элемента длины

$$dl^2 = g_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu.$$

Пусть есть две криволинейные системы координат — ξ^ν и ξ'^μ . Матрица перехода $\mathcal{D}'^\mu_\nu$ между этими системами координат равна

$$\mathcal{D}'^\mu_\nu = \mathcal{D}'^\mu_k \mathcal{D}_\nu^k = \frac{\partial \xi'^\mu}{\partial \xi^\nu}, \quad \mathcal{D}'^\nu_\sigma \mathcal{D}'^\sigma_\mu = \delta^\nu_\mu, \quad (9.5)$$

что обобщает равенства (9.2).

9-1.1 Ковариантная производная

Пусть нам дано некоторое тензорное поле. Оставаясь в прямолинейной системе координат, мы можем дифференцировать такое поле, при этом результат дифференцирования будет также являться тензором с рангом на 1 выше, см. Пункт 8-1.4. Выработаем правила дифференцирования тензоров в криволинейных координатах.

Градиент скалярного поля φ в криволинейных координатах вычисляется также, как и в декартовых:

$$\mathcal{D}_\nu^i \partial_i \varphi \equiv \nabla_\nu \varphi = \partial_\nu \varphi \quad (9.6)$$

согласно (9.3). Поле $\partial_\nu \varphi$ является, таким образом, ковариантным векторным полем.

Градиент $\partial_i v_k$ некоторого векторного поля v_k в его ковариантной записи в криволинейных координатах находится согласно более сложному правилу

$$\mathcal{D}_\mu^i \mathcal{D}_\nu^k \partial_i v_k \equiv \nabla_\mu v_\nu = \partial_\mu v_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda v_\lambda. \quad (9.7)$$

В отличие от случая скаляра (9.6), $\partial_\mu v_\nu$ не является ковариантным тензором второго ранга, тогда как $\nabla_\mu v_\nu$ — является (по определению). Оператор ∇ называется *ковариантной производной* и не совпадает с простой производной ∂_μ . Не является, соответственно, и тензором символ Кристоффеля (Christoffel symbols) $\Gamma_{\mu\lambda}^\nu$ (9.13): при переходе из одной криволинейной системы координат в другую он не преобразуется согласно правилам

(9.3); тем не менее, по определению поднятие и опускание первого индекса у символа Кристоффеля производится по тем же правилам (8.13). В случае, если в (9.7) градиент берётся не от вектора, а от тензора ранга n (например, $v_\mu w_\nu$, ранг 2), то вместо одного слагаемого с символом Кристоффеля в (9.7) должно стоять, соответственно, n слагаемых. Градиент контравариантного поля имеет вид

$$D_\mu^i D_k^\nu \partial_i v^k \equiv \nabla_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu v^\lambda, \quad (9.8)$$

что можно получить из требования, что ковариантная производная скаляра $\varphi = v^\lambda w_\lambda$ должна быть просто частной производной:

$$\nabla_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi = v^\lambda \nabla_\mu w_\lambda + w_\lambda \nabla_\mu v^\lambda.$$

Закон преобразования символов Кристоффеля при переходе из одной системы координат в другую (9.5) можно получить исходя из определения (9.8):

$$\begin{aligned} \nabla'_\nu v'^\mu &= D_{\nu'}^\sigma D_\sigma'^\mu \left(\partial_{\nu'} (D_{\lambda'}^\sigma v'^\lambda) + \Gamma_{\sigma\tau}^\sigma (D_{\lambda'}^\tau v'^\lambda) \right) = \\ &= \partial_{\nu'} v'^\mu + (D_\sigma'^\mu \partial_{\nu'} D_{\lambda'}^\sigma + D_\sigma'^\mu D_{\lambda'}^\sigma D_{\nu'}^\tau \Gamma_{\tau\lambda}^\sigma) v'^\lambda. \end{aligned}$$

Откуда заключаем, что

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu'} = D_\sigma'^\mu D_{\nu'}^\sigma D_{\lambda'}^\sigma \Gamma_{\sigma\tau}^\sigma + D_\sigma'^\mu \left(\frac{\partial D_{\lambda'}^\sigma}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial \xi'^\nu \partial \xi'^\lambda} \right), \quad (9.9)$$

т.е. символы Кристоффеля $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu'}$ действительно не являются тензором.

Для ковариантной и частной производной приняты стандартные обозначения:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu v_\nu &= v_{\nu;\mu}, \quad \partial_\mu v_\nu = v_{\nu,\mu}, \\ \nabla^\mu &= g^{\mu\nu} \nabla_\nu, \quad v_\nu{}^{;\mu} = g^{\mu\lambda} v_{\nu;\lambda}. \end{aligned}$$

Отметим, что до этого момента нам не важны были конкретные свойства метрики, поэтому наши рассуждения носили общий характер.

9-1.1.1 Связь символов Кристоффеля с метрикой

Явное выражение для символов Кристоффеля можно получить, применив формулу (9.9) для перехода из декартовой системы координат в криволинейную. В декартовой системе координат символы Кристоффеля равны нулю, поэтому

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu'} = D_i^\mu \frac{\partial^2 r^i}{\partial \xi^\nu \partial \xi^\lambda} = D_i^\mu \partial_\lambda D_\nu^i = \Gamma_{\lambda\nu}^\mu. \quad (9.10)$$

Таким образом, символы Кристоффеля симметричны по нижней паре индексов для криволинейных координат, вложенных в прямолинейную систему координат.

Однако более универсальным является выражение символов Кристоффеля через метрику. Сначала отметим, что ковариантная производная коммутирует с метрическим и абсолютно антисимметричным (8.21, 8.23) тензорами,

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda g_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} \nabla_\lambda, \quad \nabla_\lambda g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \nabla_\lambda, \\ \nabla_\lambda \mathfrak{E}^{\mu\nu\rho} &= \mathfrak{E}^{\mu\nu\rho} \nabla_\lambda. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Эти равенства легко проверить, записав результат дифференцирования в декартовых координатах, где метрический и антисимметричный тензор постоянны в пространстве и равны соответственно δ^{ik} и ϵ^{ikl} .

Распишем явно условие (9.11) равенства нулю ковариантной производной метрики:

$$0 = g_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma_{\nu\mu\lambda} - \Gamma_{\mu\nu\lambda}, \quad \Gamma_{\nu\mu\lambda} \equiv g_{\varsigma\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\varsigma \quad (9.12)$$

Теперь если это уравнение взять в комбинации индексов (для производной метрики) $\{\mu\nu\lambda\} - \{\mu\lambda\nu\} - \{\lambda\nu\mu\}$, то мы придём к искомому уравнению

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} = (g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}) / 2. \quad (9.13)$$

9-1.1.2 Вариации криволинейных координат

Предположим, что криволинейная система координат связана с материальной средой, и мы производим (дальнейшую) деформацию этой среды, то есть подвергаем некоторой вариации систему криволинейных координат ξ : $\xi(\mathbf{r}) \rightarrow \xi(\mathbf{r}) + \delta\xi(\mathbf{r})$. Это же самое изменение можно представить в виде движения лагранжевых маркеров,

$$r^i(\xi) \rightarrow r^i(\xi) + \delta r^i(\xi) = r^i(\xi) + v^i(\xi) \delta t$$

где δt – приращение (виртуального) времени, а $\mathbf{v}$ – (виртуальная) скорость, $\delta\mathbf{r} = \mathbf{v} \delta t$.

Параметризации вариации криволинейной системы координат через $\delta\xi(\mathbf{r})$ и $v^i(\xi) \delta t$ связаны между собой соотношением

$$\begin{aligned} \delta D_\mu^i &= \frac{\partial \delta r^i}{\partial \xi^\mu} = D_\mu^k \partial_k v^i \delta t, \\ \delta D_k^\mu &= \frac{\partial \delta \xi^\mu}{\partial r^k} = -D_i^\mu \partial_k v^i \delta t, \end{aligned}$$

где последнее равенство можно получить из требования сохранения тождества $D_\mu^i D_k^\mu = \delta_k^i$. Отсюда можно найти вариацию метрики

$$\delta g_{\mu\nu} = D_\mu^i D_\nu^k (\partial_i v_k + \partial_k v_i) \delta t = (\nabla_\mu v_\nu + \nabla_\nu v_\mu) \delta t. \quad (9.14)$$

Вариация якобиана перехода

$$\delta g = M_g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = 2g \operatorname{div} \mathbf{v} \delta t, \quad (9.15)$$

где $M_g^{\mu\nu}$ – матрица миноров матрицы $\|g_{\mu\nu}\|$, так что $g = M_g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} / d$, где d – размерность пространства.

9-1.2 Операции интегрирования и векторного дифференцирования

Для дальнейших выкладок нам будет полезны выражение для двух различных свёрток символа Кристоффеля

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{\nu} \sqrt{|g|}, \quad g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{\mu} (\sqrt{|g|} g^{\mu\sigma}). \quad (9.16)$$

Оба равенства могут быть выведены из (9.13) с использованием выражения для вариации детерминанта метрики в виде (9.15). При получении второго равенства для преобразования первых двух слагаемых в (9.13) надо использовать тождество $\partial_{\rho}(g_{\mu\sigma} g^{\sigma\nu}) = 0$.

Теперь можно вычислить выражения для дивергенции вектора и обобщения оператора Лапласа, действующего на скаляр. Первое равенство в (9.16) даёт

$$A^{\mu}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{\nu} (\sqrt{|g|} A^{\mu}), \quad (9.17)$$

$$\phi_{;\mu}^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{\nu} (\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_{\nu} \phi)$$

Из уравнения (9.17) следует теорема Гаусса

$$\int_V d\Omega A^{\mu}_{;\mu} = \int_{\partial V} dS_{\mu} \sqrt{|g|} A^{\mu}. \quad (9.18)$$

где слева происходит интегрирование по некоторому d -мерному объёму V , а справа — по $(d-1)$ -мерной поверхности ∂V , окружающей этот объём; dS_{μ} есть ковариантная компонента вектора элемента площади поверхности.

В общем случае дивергенция тензора не является полной производной. Например, для симметричного тензора второго ранга $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$

$$\nabla_{\nu} T^{\nu}_{\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left(\sqrt{|g|} T^{\nu}_{\mu} \right)_{;\nu} - \frac{1}{2} T^{\lambda\nu} g_{\lambda\nu,\mu}. \quad (9.19)$$

В прямую сторону это равенство проверяется подстановкой непосредственного выражения для ковариантной производной, затем для одного слагаемого следует воспользоваться правилом для свёртки (9.16), а для другого выражением через метрику (9.13) для символов Кристоффеля.

Исключение из этого общего правила составляет антисимметричный тензор второго ранга: если $F^{\nu\mu} = -F^{\mu\nu}$, то

$$\nabla_{\nu} F^{\nu\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{\nu} (\sqrt{|g|} F^{\nu\mu}). \quad (9.20)$$

Для проверки этого равенства надо воспользоваться также симметричностью символов Кристоффеля по последним индексам (9.10).

Наконец, установим возможность интегрирования по частям, если производится интегрирование скалярной

величины. Например, рассмотрим интеграл (??) предполагая, что подынтегральное выражение обращается в нуль на границе области интегрирования:

$$\begin{aligned} \int d\Omega T^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \delta x_{\nu} &= \int d\Omega \nabla_{\mu} (T^{\mu\nu} \delta x_{\nu}) - \int d\Omega \delta x_{\nu} \nabla_{\mu} T^{\mu\nu} \\ &= - \int d\Omega \delta x_{\nu} \nabla_{\mu} T^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (9.21)$$

Сначала мы воспользовались правилом Лейбница для ковариантной производной произведения, затем мы воспользовались теоремой Гаусса (9.18) с учётом того, что интегрирование по границе равно нулю.

9-1.2.1 Антисимметричная производная и ротор в трёх-мерном пространстве

Пусть дано векторное ковариантное поле A_{μ} , то составляя антисимметричную комбинацию его производных, можно составить антисимметричный тензор

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} = \nabla_{\mu} A_{\nu} - \nabla_{\nu} A_{\mu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}. \quad (9.22)$$

Таким образом, ковариантная производная в этом выражении может быть заменена на простую в силу симметрии символов Кристоффеля по последней паре индексов. Отметим, что для контравариантного поля такого сокращения не происходит.

В трёх-мерном пространстве операция (9.22) называется операцией взятия ротора. В векторных обозначениях вместо антисимметричного тензора $F_{\mu\nu}$ используют аксиальный вектор, см. (8.30). Поэтому определение ротора использует полностью антисимметричный тензор, см. Пункт 8-1.3. Операции взятия ротора, записанной в терминах ковариантного вектора, не участвуют символы Кристоффеля,

$$[\text{rot } v]^{\mu} = \epsilon^{\mu\nu\lambda} \nabla_{\nu} v_{\lambda} = \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_{\nu} v_{\lambda} \quad (9.23)$$

9-1.3 Двумерная поверхность, вложенная в трёх-мерное пространство

Рассмотрим поверхность, которая задаётся уравнением $\Phi(\mathbf{r}) = 0$, а на самой поверхности введены координаты ξ^{α} , $\{\alpha, \beta \dots\} = \{1, 2\}$. Совокупность $\{\xi^1, \xi^2, \Phi\}$ можно рассматривать как систему криволинейных координат, вложенную в трёх-мерное пространство. Эта система координат определена по крайней мере в некоторой окрестности поверхности $\Phi = 0$. Мы предполагаем, что локальные координаты $\{\xi^1, \xi^2, \Phi\}$ образуют правую тройку. Матрицу перехода из декартовой системы координат в криволинейную будем обозначать D_i^{μ} , см. (9.2). Для этих криволинейных координат может быть определена метрика $g_{\mu\nu}$, где $\{\mu, \nu, \dots\} = \{1, 2, \Phi\}$. Блок $g_{\alpha\beta}$ этой метрики является метрикой для криволинейных координат ξ^{α} на рассматриваемой поверхности. Удобно ввести обозначение

$$g_{\perp} = \det \|g_{\alpha\beta}\|. \quad (9.24)$$

Пусть ℓ – вектор нормали к поверхности, смотрящий из области ‘1’ в область ‘2’; предположим также, что в области ‘1’ $\Phi < 0$, а в области ‘2’, соответственно, $\Phi > 0$. Тогда имеем соотношение

$$\ell^i = \frac{\nabla_i \Phi}{|\text{grad } \Phi|} \equiv \frac{D_i^\Phi}{\sqrt{D_k^\Phi D_k^\Phi}} = \frac{D_i^\Phi}{\sqrt{g_\perp/g}},$$

где D_k^μ определено в (9.2).

На поверхности можно определить полностью антисимметричный тензор второго ранга

$$\mathfrak{E}^{\alpha\beta} = \frac{\epsilon^{\alpha\beta}}{\sqrt{g_\perp}}, \quad \mathfrak{E}_{\alpha\beta} = \sqrt{g_\perp} \epsilon_{\alpha\beta}$$

Введём на поверхности косой градиент

$$\nabla_\alpha^* = \mathfrak{E}_\alpha^\beta \nabla_\beta. \quad (9.25)$$

Простой и косой градиенты коммутируют с метрическим и антисимметричным тензорами,

$$\nabla_\alpha g_{\beta\gamma} = \nabla_\alpha \mathfrak{E}^{\beta\gamma} = 0.$$

сравни с (9.11).

Тензор внешней кривизны

$$K_{\alpha\beta} = K_{\beta\alpha} = \ell^i \partial_\beta D_\alpha^i = -D_\alpha^i \partial_\beta \ell^i. \quad (9.26)$$

Составленные из него два инварианта

$$K_m = g^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}, \quad K_G = \frac{1}{2} \mathfrak{E}^{\alpha\beta} \mathfrak{E}^{\gamma\delta} K_{\alpha\gamma} K_{\beta\delta} = \frac{\det \|K_{\alpha\beta}\|}{\det \|g_{\alpha\beta}\|} \quad (9.27)$$

называются, соответственно, средней и гауссовой кривизной. Если $R_{1,2}$ – главные кривизны поверхности в точке, то $1/K_m = 1/R_1 + 1/R_2$, $K_G = 1/(R_1 R_2)$. Выбор знака в (9.26) соответствует тому, что для сферы с нормалью ℓ , направленной вовне сферы, средняя кривизна $K_m < 0$.

9-1.3.1 Запись в терминах единичной нормали

Будем рассматривать такие криволинейные координаты, для которых вектора D_μ^i , $\mu = \{1, 2, \Phi\}$ образуют правую ортонормированную тройку, по крайней мере локально в окрестности рассматриваемой точки. В этом случае тензора, определённые на поверхности, можно записывать в декартовых координатах; любая свёртка

таких тензоров с вектором нормали ℓ должна давать ноль. Введём проектор на плоскость $\Phi = \text{const}$ и касательный градиент вдоль неё

$$\delta_{ik}^\perp = \delta_{ik} - \ell^i \ell^k = g_{\alpha\beta} D_i^\alpha D_k^\beta, \quad \partial_i^\perp = \delta_{ik}^\perp \partial_k.$$

Тензор кривизны

$$K_{ik} = -\partial_i^\perp \ell^k = -\partial_k^\perp \ell^i, \quad (9.28)$$

приведённый к диагональному виду, имеет на диагонали ненулевыми элементами $1/R_1$ и $1/R_2$, где $R_{1,2}$ – главные кривизны поверхности в данной точке; собственно говоря, это можно считать определением главных кривизн. Направления на рассматриваемой поверхности, соответствующие главным кривизнам, ортогональны друг другу. Выбор знака в (9.28) тот же самый что и в (9.27): если в случае сферы нормаль направлена наружу, то радиусы кривизны $R_{1,2}$ отрицательны. В частности, средняя K_m и гауссова K_G кривизны равны

$$K_m = K_{ii} = -\partial_k^\perp \ell^k = -\text{div } \ell, \quad (9.29)$$

$$K_G = \det \|K_{ik} + \ell^i \ell^k\| = \frac{1}{2} ((\partial_i \ell_k)(\partial_k \ell_i) - (\partial_i \ell_i)^2).$$

Если мы имеем дело с движением среды, то скорость изменения метрики равна

$$\delta g^\perp = 2g^\perp \delta_{ik}^\perp \partial_i v^k \delta t, \quad (9.30)$$

сравни с (9.15).

9-1.3.2 Параметризация поверхности в декартовых координатах

Пусть теперь поверхность задана уравнением

$$z = h(x, y), \quad \Phi(x, y, z) = z - h(x, y),$$

где $h(x, y)$ – некоторая однозначная функция. Единичный вектор

$$\|\ell^i\| = \frac{\{-\partial_x h, -\partial_y h, 1\}}{\sqrt{g_\perp}}, \quad g_\perp = 1 + \partial_\alpha h \partial_\alpha h.$$

Средняя кривизна

$$K_m = -\partial_\alpha \ell^\alpha. \quad (9.31)$$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Christoffel symbols, 106
- g-фактор, 51
- Huygens' radiation source, 88
- rapidity, 25
- Баргмана-Мишеля-Телегди уравнение, 52
- Био-Савара-Лапласа закон, 73
- Гюйгенса
 - элементарный излучатель, 88
- Доплера эффект, 62
- Кристоффеля символ, 106
- Кронекера символ, 99
- Кулона
 - закон, 67
 - калибровка, 45
- Лармора
 - теорема, 75
- Лиенара-Вихерта потенциалы, 77
- Лоренца
 - калибровка, 45
 - преобразование, 22
 - сила, 44
- Максвелла
 - уравнения
 - первая пара, 46
- Минковского
 - метрика, 24
 - пространство, 24
- Паули гамильтониан, 43
- Паули-Любанского псевдовектор, 41
- Эйнштейна
 - соглашение, 99
 - формула для массы покоя, 34
- абerrация света, 62
- быстрота, 25
- вектор
 - аксиальный, 103
- волна
 - длина, 60
 - частота, 60
 - циклическая, 60
- волновой вектор, 60
- волновой луч, 64
- гиромагнитное отношение, 75
- интервал, 20
- калибровочное преобразование, 45
- ковариантная запись уравнений движения, 34
- момент
 - дипольный, 68
 - квадрупольный, 69
 - магнитодипольный, 74
- оператор д'Аламбера, 56
- уравнение
 - волновое, 56
 - непрерывности, 29
- электромагнитное поле
 - инварианты, 46
 - тензор, 43
- энергия
 - электростатическая, 69
- энергия покоя, 34

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература по электродинамике

Балдин, А., Гольданский, В., & Розенталь, И. (1959). *Кинематика ядерных реакций*. Государственное издательство физико-математической литературы.

Ландау, Л. Д., & Лифшиц, Е. М. (1988). *Теоретическая физика, том II. Теория поля*. М: Наука.

Дополнительная литература по электродинамике

Клепиков, Н. П. (1985). Силы торможения излучением и излучение заряженных частиц. *Успехи физических наук*, 146(2), 317–339.

Кузнецов, В., & Смилга, В. (2001). *Движение заряженной частицы в слабо-неоднородном магнитном поле. Дрейфовая теория: учебно-методическое пособие*. М.: МФТИ.

Окунь, Л. Б. (2008). Формула Эйнштейна: $E_0 = mc^2$. «Не смеётся ли Господь Бог»? *Успехи физических наук*, 178(5), 541–555.

Тернов, И. М., & Бордовицын, В. А. (1980). О современной интерпретации классической теории спина Я. И. Френкеля. *Успехи физических наук*, 132(3).

Дополнительная литература, не касающаяся непосредственно классической электродинамики

Olver, F. W., Lozier, D. W., Boisvert, R. F., & Clark, C. W. (2010). *NIST Handbook of Mathematical Functions*.

Вергелес, С. Н. (2008). *Лекции по квантовой электродинамике*. М.: ФИЗМАТЛИТ.

Пескин, М., & Шредер, Д. (2001). *Введение в квантовую теорию поля*. РХД.

Фейнман, Р., & Хибс, А. (1968). *Квантовая механика и интегралы по траекториям*. Москва: Мир.

Оригинальные работы