**УТВЕРЖДЕНО**
Проректор по учебной
и методической работе
Д.А. Зубцов
25 июня 2015 г.

# ПРОГРАММА

по дисциплине: **Теория поля**
по направлению подготовки:
**03.03.01 «Прикладные математика и физика»**
факультеты: **ФФКЭ**
кафедра: **теоретической физики**
курс: 3
семестр: 5

Трудоемкость:
теор. курс: базовая часть – 3 зачет. ед.
лекции – 30 часов
Экзамен – 5 семестр
практические (семинарские)
занятия – 30 часов
Курсовые и контрольные работы – 4

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60
Самостоятельная работа – 18 часов

Программу и задание составил к.ф.-м.н., доц.
С. С. Вергелес

Программа принята на заседании
кафедры теоретической физики
20 мая 2017 года

Заведующий кафедрой Ю.М. Белоусов

# ТЕОРИЯ ПОЛЯ И МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

1. **Принцип относительности.** Однородность пространства и однородность времени, изотропия пространства, инерциальные системы отсчёта. Ньютонова механика и принцип относительности Галилея. Потенциальность сил и дальнодействие. Постоянство скорости света. Несовместимость конечности скорости распространения взаимодействий с принципом относительности Галилея. Принцип относительности Эйнштейна. Изменение представлений о свойствах пространства и времени в результате опытов со светом. Преобразования Лоренца, их вывод и следствия из них. Относительность одновременности и промежутков времени. Мысленные опыты по измерению длин, промежутков времени и синхронизации часов. Сокращение длин, замедление времени и собственное время. Релятивистское сложение скоростей и преобразование направлений. Эффект прожектора. Аберрация света.

2. **Четырехмерное псевдоевклидово пространство Минковского.** Декартовы координаты. Мировая точка (событие) и мировая линия. Интервалы между событиями как мера расстояния в пространстве Минковского. Пространственноподобные, времениподобные и нулевые интервалы. Световой конус. Принцип причинности. Инвариантность интервала и геометрическая интерпретация преобразований Лоренца. Аффинные преобразования. Понятие 4-вектора. Скалярное произведение. Метрика четырехмерного пространства. Контра- и ковариантное представление. 4-градиент и 4-дивергенция. 4-векторы скорости и ускорения. Ковариантность физических законов относительно преобразования Лоренца как переформулировка принципа относительности. Векторы и тензоры в трехмерном пространстве.

3. **Описание движения свободной релятивистской точечной частицы.** Понятие точечной элементарной частицы, её 4-координата и мировая линия. Ковариантная формулировка принципа наименьшего действия в пространстве Минковского, функция Лагранжа свободной частицы. Принцип соответствия. Энергия, импульс и гамильтониан свободной релятивистской частицы. 4-вектор импульса. Частицы с нулевой массой. Ультрарелятивистское движение. Закон сохранения 4-импульса замкнутой системы как следствие однородности пространства-времени. Лабораторная система и система центра масс. Применение закона сохра-

нения 4-импульса для описания упругих столкновений частиц. Эффективная масса системы. Неупругие столкновения и распады с образованием новых частиц. Дефект массы для составных систем. Порог реакции. Волновой 4-вектор. Эффект Доплера.

4. **Взаимодействие заряженных частиц с электромагнитным полем.** Понятия заряда точечной элементарной частицы и электромагнитного поля. 4-вектор-потенциал электромагнитного поля. Действие и лагранжиан для точечной частицы во внешнем векторном поле. Энергия, обобщенный и кинематический импульсы. Уравнение Лагранжа и сила Лоренца. Функция Гамильтона. Градиентная (калибровочная) инвариантность. Ковариантный вывод уравнения движения заряженной частицы в четырехмерном виде. 4-вектор силы.

5. **Тензор электромагнитного поля.** Понятие тензора. 4-тензоры и их свойства. Абсолютно антисимметричный и метрический тензоры. Инвариантность 4-объема. Электрическое и магнитное поля́ как компоненты антисимметричного 4-тензора электромагнитного поля. Преобразование Лоренца для потенциалов ($\varphi$, $\mathbf{A}$) и напряженностей ($\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$) из одной системы отсчета в другую. Инварианты поля и их следствия. Дуальный тензор поля.

6. **Движение заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле.** Движение заряженной частицы в постоянных однородных электрическом и магнитном полях. Дрейф в скрещенных полях. Средняя сила и средний момент силы для системы частиц во внешних слабонеоднородных электрическом и магнитном полях. Электрический и магнитный дипольные моменты. Энергия магнитного момента во внешнем магнитном поле. Гиромагнитное отношение. Прецессия магнитного момента во внешнем поле и теорема Лармора. Адиабатический инвариант и движение заряженной частицы в слабопеременном магнитном поле. Движение ведущего центра орбиты и поперечный дрейф заряженной частицы в слабонеоднородном магнитном поле. Магнитные зеркала и примеры осуществления их в природе и технике.

7. **Уравнения электромагнитного поля.** Уравнения Максвелла как обобщение опытных фактов и их вывод из первых принципов. Первая пара уравнений Максвелла. Распределенные заряды. Переход от точечных зарядов к распределенной системе зарядов и токов при помощи $\delta$-функции. Плотности заряда и тока системы точечных частиц. Закон сохранения электрического заряда и

уравнение непрерывности. 4-вектор плотности тока. Функционал действия и плотность функции Лагранжа для электромагнитного поля. *Получение второй пары уравнений Максвелла из вариационного принципа.* Уравнения Максвелла в трехмерной и четырехмерной формах. Единственность решений уравнений Максвелла. Свойства симметрии уравнений Максвелла.

8. **Энергия и импульс электромагнитного поля. Уравнения для потенциалов.** Плотность энергии поля и вектор плотности потока энергии (вектор Пойнтинга). Баланс энергии системы заряженных частиц и электромагнитного поля. Плотность импульса поля, тензор плотности потока импульса и тензор напряжений Максвелла. *Баланс импульса системы заряженных частиц и электромагнитного поля. Плотность силы Лоренца. 4-тензор энергии-импульса.* Калибровочная инвариантность уравнений электродинамики. Уравнения для потенциалов. Вид уравнений для 4-потенциалов в кулоновской калибровке и в калибровке Лоренца. Оператор Д'Аламбера. Основные уравнения электро- и магнитостатики. Электростатический потенциал точечного заряда.

9. **Электро- и магнитостатика.** Уравнение Пуассона и его решение. Функция Грина уравнения Пуассона. Электрическое поле системы неподвижных зарядов на больших расстояниях. Мультипольное разложение потенциалов. Электрический квадрупольный момент. Энергия электростатического взаимодействия и устранение самодействия точечных частиц. Выражение энергии системы зарядов во внешнем слабонеоднородном электрическом поле через мультипольные моменты. Решение уравнения Пуассона для векторного потенциала стационарной системы токов. Закон Био–Савара. Магнитное поле усредненного по времени стационарного движения зарядов на больших расстояниях.

10. **Свободное поле. Неоднородные волновые уравнения.** Однородные волновые уравнения для потенциалов свободного электромагнитного поля в пустом пространстве и их решения. Плоские монохроматические электромагнитные волны и их поляризация. Линейная, круговая и эллиптическая поляризации. Усреднение по времени и по поляризации. Решение неоднородных волновых уравнений с помощью функции Грина. Функция Грина в фурье-представлении по времени. Функция Грина волнового уравнения и принцип причинности. Определение запаздывающей функции Грина.

11. **Запаздывающие потенциалы. Излучение в дипольном приближении.** Запаздывающая и опережающая функции Грина волнового уравнения. Запаздывающие потенциалы. Дипольное приближение, его физический смысл и критерии применимости. Потенциалы поля излучения в дипольном приближении. Поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в волновой и квазистационарной зонах. Интенсивность излучения в дипольном приближении. Угловое и спектральное распределения дипольного излучения и его поляризация.

12. **Излучение движущихся зарядов вне дипольного приближения.** *Поле в волновой зоне колеблющихся магнитного диполя и электрического квадруполя. Интенсивность излучения магнитного диполя и электрического квадруполя.* Излучение релятивистски-движущихся частиц. Потенциалы Лиенара–Вихерта. Формула Лармора. Синхротронное излучение и его полная интенсивность. Оценка длины формирования, углового и спектрального распределения синхротронного излучения в ультрарелятивистском случае.

13. **Реакция излучения и рассеяние электромагнитных волн.** Сила радиационного трения. Затухание, вызываемое излучением. Естественная (классическая) ширина спектральной линии. Пределы применимости классической электродинамики на малых расстояниях и в сильных полях. Постановка задачи о рассеянии. Дифференциальное и полное сечение рассеяния монохроматической волны на заряде. Рассеяние света на свободном электроне. Томсоновское сечение рассеяния и классический радиус электрона. Поляризация рассеянного света. Рассеяние электромагнитных волн на связанном электроне как на осцилляторе с затуханием. Резонансное рассеяние.

## Литература

### Основная


1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011-2012.

2. *Батыгин В.В., Топтыгин И.Н.* Сборник задач по электродинамике. — М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.

3. *Белоусов Ю.М., Бурмистров С.Н., Тернов А.И.* Задачи по теоретической физике. – Долгопрудный: ИД «Интеллект», 2013.

Дополнительная

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Краткий курс теоретической физики. Т. 1. Механика, электродинамика. — М.: Наука, 1969.

2. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. — М.: Мир, 1965.

3. *Батыгин В.В., Топтыгин И.Н.* Современная электродинамика. Ч. 1. Микроскопическая теория. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

4. *Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н.* Классическая электродинамика. — М.: Наука, 1985.

5. Фейнмановские лекции по физике. Вып. II, IV, V, VI. — М.: Мир, 1965.

6. *Фомичев С.В., Толоконников С.В.* Излучение заряженных частиц в вакууме: учебно-методическое пособие. — М.: МФТИ, 2003.

7. *Кузнецов В.П., Смилга В.П.* Движение заряженной частицы во внешнем слабонеоднородном магнитном поле. Дрейфовая теория: учебно-методическое пособие. — М.: МФТИ, 2001.

8. *Белоусов Ю.М.,Кузнецов В.П., Смилга В.П.* Практическая математика. Руководство для начинающих изучать теоретическую физику. — Долгопрудный: Издательский дом “Интеллект”, 2009.

9. *Коренев Г.В.* Тензорное исчисление. — М.: МФТИ, 2000.

10. *Olver F. W. J.* NIST Handbook of Mathematical Functions. – Cambridge University Press, 2010

# ФОРМУЛЬНОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ

## I. НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ ИЗ КУРСА МАТЕМАТИКИ

### 1. Тензорные обозначения и векторный анализ

Правило Эйнштейна: по дважды повторяющимся индексам производится суммирование.
$\delta_{ik}$ — символ Кронекера, абсолютно симметричный тензор второго ранга.
$\epsilon_{ikl}$ — абсолютно антисимметричный трехмерный тензор третьего ранга:

$$\epsilon_{ikl} = -\epsilon_{kil} = \epsilon_{kli}, \qquad \epsilon_{123} = \epsilon_{xyz} = 1,$$

$$\epsilon_{ikl}\epsilon_{nmj} = \det\begin{pmatrix} \delta_{in} & \delta_{im} & \delta_{ij} \\ \delta_{kn} & \delta_{km} & \delta_{kj} \\ \delta_{ln} & \delta_{lm} & \delta_{lj} \end{pmatrix},$$

$$[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]_l = \epsilon_{ikl}a_i b_k\,, \quad \epsilon_{ikl}\epsilon_{nml} = \delta_{in}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kn}\,,$$

$$\epsilon_{ikl}\epsilon_{nkl} = 2\delta_{in}\,, \quad \epsilon_{ikl}\epsilon_{ikl} = 6\,.$$

Усреднение по единичному радиусу-вектору $\mathbf{n} \equiv \boldsymbol{r}/r$:

$$\overline{n_i} = 0; \quad \overline{n_i n_k} = \frac{1}{3}\delta_{ik}; \quad \overline{n_i n_k n_l} = 0;$$

$$\overline{n_i n_k n_l n_n} = \frac{1}{15}(\delta_{ik}\delta_{ln} + \delta_{il}\delta_{kn} + \delta_{in}\delta_{kl})\,.$$

Векторный оператор дифференцирования

$$\boldsymbol{\nabla} = \left\{\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right\} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \equiv \mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\,,$$

$$\Delta = (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}\,, \quad \operatorname{grad}\varphi \equiv \boldsymbol{\nabla}\varphi = \mathbf{e}_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,,$$

$$\operatorname{div}\mathbf{a} \equiv (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}) = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}\,, \quad \operatorname{rot}\mathbf{a} \equiv [\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}] = \mathbf{e}_i e_{ikl}\frac{\partial a_l}{\partial x_k}\,,$$

$$(\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla}) \equiv a_x\frac{\partial}{\partial x} + a_y\frac{\partial}{\partial y} + a_z\frac{\partial}{\partial z} = a_i\frac{\partial}{\partial x_i}\,,$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} - \Delta\,\mathbf{a}\,, \quad \operatorname{div}[\mathbf{a}\times\mathbf{b}] = \mathbf{b}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{b}\,,$$

$$\operatorname{rot}[\mathbf{a}\times\mathbf{b}] = \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b} - \mathbf{b}\operatorname{div}\mathbf{a} - (\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{b} + (\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{a}\,,$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = [\mathbf{a}\times\operatorname{rot}\mathbf{b}] + [\mathbf{b}\times\operatorname{rot}\mathbf{a}] + (\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{b} + (\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{a}\,,$$

$$\operatorname{rot} f\mathbf{a} = [\operatorname{grad} f\times\mathbf{a}] + f\operatorname{rot}\mathbf{a}\,,\ \operatorname{div} f\mathbf{a} = (\operatorname{grad} f\cdot\mathbf{a}) + f\operatorname{div}\mathbf{a}\,.$$

Формулы для величин, содержащих радиус-вектор и его модуль: $r \equiv |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$:

$$\boldsymbol{\nabla}r = \boldsymbol{r}/r \equiv \mathbf{n}; \quad \boldsymbol{\nabla}f(r) = df/dr\cdot\mathbf{n}; \quad \operatorname{div}\boldsymbol{r} = 3; \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{r} = 0;$$

$$(\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{r} = \mathbf{a}; \quad \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{r}) = \mathbf{a}; \quad \operatorname{rot}[\mathbf{a}\times\boldsymbol{r}] = 2\mathbf{a} \quad (\mathbf{a} = \mathrm{const}).$$

Лапласиан от сферически-симметричной функции

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rf)}{\partial r^2}.$$

Теоремы Гаусса и Стокса:

$$\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{a} = \oiint_S (\mathbf{a}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}); \quad \oint_L (\mathbf{a}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l}) = \iint_S (\operatorname{rot}\mathbf{a}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S})\,.$$

Разложение в ряд Тейлора:

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{r}+\mathbf{a}) = \mathbf{F}(\boldsymbol{r}) + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{F}(\boldsymbol{r}) + \frac{1}{2!}(\mathbf{a}\cdot\nabla)^2\mathbf{F}(\boldsymbol{r}) + \cdots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\mathbf{a}\cdot\nabla)^n\mathbf{F}(\boldsymbol{r}) = e^{(\mathbf{a}\cdot\nabla)}\mathbf{F}(\boldsymbol{r})\,.$$

## 2. Преобразование Фурье

## (разложение по плоским волнам)

$$\mathbf{A}(\mathbf{k},\omega) = \iiiint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}(\boldsymbol{r},t)e^{-i(\mathbf{k}\boldsymbol{r}-\omega t)}\,\mathrm{d}^3r\,\mathrm{d}t\,,$$

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{r},t) = \iiiint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}(\mathbf{k},\omega)e^{i(\mathbf{k}\boldsymbol{r}-\omega t)}\,\frac{\mathrm{d}^3k\,\mathrm{d}\omega}{(2\pi)^4}\,.$$

## 3. Разложение плоской волны и кулоновского потенциала по полиномам Лежандра

$$e^{i\mathbf{kr}} = e^{ikr\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l(2l+1)j_l(kr)P_l(\cos\theta)\,,$$

$$\frac{1}{|\mathbf{R}-\boldsymbol{r}|} = \frac{1}{\sqrt{R^2+r^2-2rR\cos\theta}} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l}{R^{l+1}}P_l(\cos\theta)\,,\ (R>r)\,.$$

Здесь $P_l(x)$ — полиномы Лежандра, $j_l(z)$ — сферические функции Бесселя:

$$j_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,J_{l+1/2}(z)\,.$$

Ортогональность полиномов Лежандра

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_{l'}(x)\mathrm{d}x = \delta_{l\,l'}\,\frac{2}{(2l+1)}\,, \quad P_l(1) = 1\,.$$

$$P_1(x) = x\,, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)\,, \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)\,.$$

## 4. **Формула Сохотского. Дельта-функция**

$$\lim_{\delta\to+0}\frac{1}{x-i\delta}=\mathcal{P}\frac{1}{x}+i\pi\delta(x)\,.$$

$$\int\limits_a^b f(x)\,\delta(x-x_0)\,\mathrm{d}x=\begin{cases} f(x_0)\,, & a<x_0<b\,,\\ 0\,, & x_0<a\,,x_0>b\,;\end{cases}$$

$$\delta(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{ikx}\frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\,,\qquad \delta(ix)=\frac{1}{|i|}\delta(x)\,,$$

$$\delta(f(x))=\sum_n\frac{1}{|f'(x_n)|}\,\delta(x-x_n)\,,\quad (f(x_n)=0)\,.$$

## 5. **Функции Грина**

Уравнение Пуассона:

$$\Delta\,G(\boldsymbol{r})=-4\pi\delta(\boldsymbol{r})\,,\quad G(\boldsymbol{r})=\frac{1}{r}\,.$$

Уравнение Гельмгольца:

$$(\Delta+k^2)\,G(\boldsymbol{r})=-4\pi\delta(\boldsymbol{r})\,,\quad G(\boldsymbol{r})=\frac{e^{ikr}}{r}\,.$$

Волновое уравнение:

$$\Box\,G(\boldsymbol{r},t)\equiv\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)G(\boldsymbol{r},t)=4\pi\delta(\boldsymbol{r})\delta(t)\,,$$

$$G(\boldsymbol{r},t)=\frac{\delta(t-r/c)}{r}\,.$$

# II. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

## 1. **Четырехмерные векторы и тензоры**

4-вектор контравариантный $A^\mu\equiv(A^0,\mathbf{A})\equiv(A^0,A^i)$,
4-вектор ковариантный $A_\mu\equiv(A^0,-\mathbf{A})\equiv(A^0,-A^i)$.
Скалярное произведение 4-векторов

$$A^\mu B_\mu=A^0B^0-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=A^0B^0-A^iB^i\,.$$

4-радиус-вектор $x^\mu = (ct, \boldsymbol{r})$. Интервал $s = \sqrt{x^\mu x_\mu}\,$, $s^2 = (ct)^2 - \boldsymbol{r}^2$, $\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\boldsymbol{r}^2$, $\mathrm{d}s \equiv c\mathrm{d}\tau = c\mathrm{d}t\sqrt{1-(v/c)^2}$.

Преобразование Лоренца (скорость направлена параллельно оси $x$, а также $\beta = v/c = \operatorname{th}\psi\,,\ \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} = \operatorname{ch}\psi\,,\ \beta\gamma = \operatorname{sh}\psi$):

$$\begin{pmatrix} A'^0 \\ A'^1 \\ A'^2 \\ A'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}, \quad A'^\mu = \Lambda'^\mu_{\ \lambda} A^\lambda\,,$$

$$\begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'^0 \\ A'^1 \\ A'^2 \\ A'^3 \end{pmatrix}, \qquad A^\mu = \Lambda^\mu_{\ \prime\nu} A'^\nu\,,$$

$$\begin{pmatrix} A'_0 \\ A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}, \qquad A'_\nu = \Lambda^\mu_{\ \prime\nu} A_\mu\,,$$

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_0 \\ A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{pmatrix}, \quad A_\lambda = \Lambda'^\mu_{\ \lambda} A'_\mu\,.$$

Интервал и метрика: $ds^2 = g_{\mu\lambda} dx^\mu dx^\lambda$,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g^{\mu\nu},\ g_\mu^{\ \nu} \equiv \delta_\mu^{\ \nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Lambda'^\mu_{\ \lambda}\Lambda^\lambda_{\ \prime\nu} = \delta^{\ \mu}_\nu\,, \quad \Lambda^\nu_{\ \prime\lambda}\Lambda'^\lambda_{\ \mu} = \delta^{\ \nu}_\mu\,, \quad A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu\,, \quad A^\nu = g^{\nu\mu}A_\mu\,.$$

## 2. **Кинематика релятивистской частицы**

Действие и лагранжиан для свободной частицы:

$$S = -mc\int_1^2 \mathrm{d}s = \int_1^2 L\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad L = -mc^2\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\,.$$

4-скорость частицы

$$u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\,,\ \frac{\mathbf{v}/c}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right), \qquad u^\mu u_\mu = 1\,.$$

4-импульс

$$p^\mu = mcu^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p}\right), \ \mathbf{p} = \frac{\mathcal{E}\mathbf{v}}{c^2}\,, \ p^\mu p_\mu = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2c^2,$$

$m$ — масса, $\mathcal{E}$ — энергия, $\mathbf{p}$ — импульс частицы. $\mathcal{E}_0 = mc^2$.

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,, \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,, \quad d\mathcal{E} = (\mathbf{v}\cdot d\mathbf{p})\,.$$

Эффективная масса системы $N$ частиц соответствует их квадрату энергии в системе ц.м.:

$$s \equiv m^2_{\text{эфф}} = (p_{1i} + p_{2i} + \cdots + p_{Ni})(p_1^i + p_2^i + \cdots + p_N^i)/c^2\,.$$

Для встречных пучков (2 частицы, $c = 1$)

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 + |\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_2|); \quad s \simeq 4\varepsilon_1\varepsilon_2 \quad \text{(у.-р. предел)}.$$

Для фиксированной мишени (частица 2 покоится, $c = 1$)

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2\varepsilon_1 m_2; \quad s \simeq 2\varepsilon_1 m_2 \quad \text{(у.-р. предел)}.$$

## 3. Электромагнитное поле и взаимодействие с частицами

Действие и лагранжиан для частиц в электромагнитном поле:

$$S = -\int_1^2 \left(-mc\mathrm{d}s - \frac{e}{c}\mathrm{A}_\mu \mathrm{d}x^\mu\right) = \int_1^2 L\mathrm{d}t\,,$$

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} - e\varphi + \frac{e}{c}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v})\,.$$

4-потенциал $\mathrm{A}^\nu = (\varphi, \mathbf{A})$, где $\varphi$ — скалярный, а $\mathbf{A}$ — векторный потенциалы, электрическое и магнитное поля́.

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi\,, \qquad \mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}\,.$$

Калибровочные преобразование и инвариантность

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathrm{grad}\,f\,, \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}; \quad \mathrm{A}'_\mu = \mathrm{A}_\mu - \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E}, \quad \mathbf{H}' = \mathbf{H}\,, \quad \text{и} \quad \mathrm{F}'_{\mu\lambda} = \mathrm{F}_{\mu\lambda}\,.$$

Тензор электромагнитного поля

$$\mathrm{F}_{\mu\lambda} = \frac{\partial \mathrm{A}_\lambda}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \mathrm{A}_\mu}{\partial x^\lambda}\,, \quad \frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \nabla^\mu; \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \nabla_\mu\,.$$

$$\mathrm{F}_{\mu\lambda} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{E}_x & \mathrm{E}_y & \mathrm{E}_z \\ -\mathrm{E}_x & 0 & -\mathrm{H}_z & \mathrm{H}_y \\ -\mathrm{E}_y & \mathrm{H}_z & 0 & -\mathrm{H}_x \\ -\mathrm{E}_z & -\mathrm{H}_y & \mathrm{H}_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{E} \\ -\mathbf{E} & -e_{ikl}\mathrm{H}_l \end{pmatrix}\,,$$

$$\mathrm{F}^{\mu\lambda} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{E}_x & -\mathrm{E}_y & -\mathrm{E}_z \\ \mathrm{E}_x & 0 & -\mathrm{H}_z & \mathrm{H}_y \\ \mathrm{E}_y & \mathrm{H}_z & 0 & -\mathrm{H}_x \\ \mathrm{E}_z & -\mathrm{H}_y & \mathrm{H}_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{E} \\ \mathbf{E} & -e_{ikl}\mathrm{H}_l \end{pmatrix}\,.$$

Дуальный тензор

$$\widetilde{\mathrm{F}}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} e_{\mu\lambda\sigma\rho} F^{\sigma\rho}\,, \quad e^{0123} = -e_{0123} = 1\,.$$

$$\widetilde{F}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{H}_x & \mathrm{H}_y & \mathrm{H}_z \\ -\mathrm{H}_x & 0 & \mathrm{E}_z & -\mathrm{E}_y \\ -\mathrm{H}_y & -\mathrm{E}_z & 0 & \mathrm{E}_x \\ -\mathrm{H}_z & \mathrm{E}_y & -\mathrm{E}_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{H} \\ -\mathbf{H} & e_{ikl}\mathrm{E}_l \end{pmatrix}\,,$$

$$\widetilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{H}_x & -\mathrm{H}_y & -\mathrm{H}_z \\ \mathrm{H}_x & 0 & \mathrm{E}_z & -\mathrm{E}_y \\ \mathrm{H}_y & -\mathrm{E}_z & 0 & \mathrm{E}_x \\ \mathrm{H}_z & \mathrm{E}_y & -\mathrm{E}_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{H} \\ \mathbf{H} & e_{ikl}\mathrm{E}_l \end{pmatrix}\,.$$

$$\widetilde{\mathrm{F}}_{\mu\lambda} = (\mathbf{H}, \mathbf{E}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{F}^{\mu\lambda} = (-\mathbf{E}, -\mathbf{H})\,.$$

Преобразование Лоренца для полей:

$$\mathrm{E}'_\parallel = \mathrm{E}_\parallel, \quad \mathbf{E}'_\perp = l\left(\mathbf{E}_\perp + \frac{1}{c}[\mathbf{V}\times\mathbf{H}]\right),$$

$$\mathrm{H}'_\parallel = \mathrm{H}_\parallel, \quad \mathbf{H}'_\perp = l\left(\mathbf{H}_\perp - \frac{1}{c}[\mathbf{V}\times\mathbf{E}]\right).$$

Инварианты электромагнитного поля — 4-скаляры

$$\mathrm{F}^{\mu\lambda}\mathrm{F}_{\mu\lambda} = 2(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)\,, \quad \mathrm{F}^{\mu\lambda}\widetilde{\mathrm{F}}_{\mu\lambda} = -4(\mathbf{E}\cdot\mathbf{H})\,.$$

Уравнения движения заряженной частицы

$$mc\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}s} = \frac{e}{c}\mathrm{F}^{\mu\lambda}u_\lambda\,; \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\,[\mathbf{v}\times\mathbf{H}]\,, \quad \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = e(\mathbf{E}\cdot\mathbf{v})\,.$$

Радиус орбиты и угловая частота обращения в магнитном поле

$$R = \frac{cp_\perp}{eH}; \quad \omega = \frac{eHc}{\mathcal{E}} \underbrace{\to}_{v \ll c} \frac{eH}{mc}\,.$$

Адиабатический инвариант: $p_\perp^2/H = \mathrm{const}\,.$

## 4. **Уравнения электромагнитного поля**

Действие для электромагнитного поля, взаимодействующего с частицами:

$$S = -\frac{1}{16\pi c}\int\limits_{ct_\mathrm{A}}^{ct_\mathrm{B}}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^4x\,\mathrm{F}^{\mu\lambda}\mathrm{F}_{\mu\lambda} - \frac{1}{c^2}\int\limits_{ct_\mathrm{A}}^{ct_\mathrm{B}}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^4x\,\mathrm{A}_\mu j^\mu\,.$$

Уравнения Максвелла:
Первая пара

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0\,, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\,;$$

$$\frac{\partial\widetilde{\mathrm{F}}^{\mu\lambda}}{\partial x^\lambda} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial\mathrm{F}_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial\mathrm{F}_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial\mathrm{F}_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} = 0\,.$$

Вторая пара

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho\,, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}\,;$$

$$\frac{\partial\mathrm{F}^{\mu\lambda}}{\partial x^\lambda} = -\frac{4\pi}{c}j^\mu\,, \quad j^\mu = (c\rho, \boldsymbol{j})\,.$$

Микроскопические плотности заряда и тока

$$\rho(\boldsymbol{r},t) = \sum\nolimits_a e_a\delta\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_a(t)\right),\ \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = \sum\nolimits_a e_a\mathbf{v}_a(t)\delta\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_a(t)\right);$$

$$\delta(\boldsymbol{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)\,,\ \delta(\mathbf{r}) = \iiint e^{i\mathbf{kr}}\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\,.$$

Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} \equiv \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{j} = 0\,.$$

## 5. **Постоянное электромагнитное поле**

Электростатические и магнитостатические поля и потенциалы:

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')dV'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,, \quad \mathbf{E}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\varphi(\boldsymbol{r}) = \int \frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')dV'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\,,$$

$$\overline{\mathbf{A}}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\overline{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{r}')dV'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,, \quad \overline{\mathbf{H}}(\boldsymbol{r}) = \operatorname{rot}\overline{\mathbf{A}}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\left[\overline{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\right]dV'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\,.$$

Электрический ($\mathbf{d}$) и магнитный ($\mathfrak{m}$) дипольные моменты системы зарядов:

$$\mathbf{d} = \sum\nolimits_a e_a\boldsymbol{r}_a\,, \qquad \mathfrak{m} = \frac{1}{2c}\sum\nolimits_a e_a[\boldsymbol{r}_a\times\mathbf{v}_a]\,.$$

Для нерелятивистской частицы: $\mathfrak{m} = g\mathbf{M}$ ($\mathbf{M}$ — момент импульса, $g$ — гиромагнитное отношение). В классике $g = e/(2mc)$.

Тензор квадрупольного момента

$$D_{ik} = \sum\nolimits_a e_a\left(3x_{a\,i}x_{a\,k} - (\boldsymbol{r}_a)^2\delta_{ik}\right)\,.$$

Мультипольное разложение электрического потенциала и электрического поля

$$\varphi = \frac{e}{r} + \frac{(\mathbf{d}\cdot\mathbf{n})}{r^2} + \frac{D_{ik}n_in_k}{2r^3} + \ldots;$$

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi = \frac{e}{r^2} + \frac{3(\mathbf{d}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}-\mathbf{d}}{r^3} + \ldots.$$

Поле магнитного диполя

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{[\bar{\mathfrak{m}}\times\boldsymbol{r}]}{r^3}\,, \quad \bar{\mathbf{H}} = \frac{3(\bar{\mathfrak{m}}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}-\bar{\mathfrak{m}}}{r^3}\,.$$

Система зарядов во внешнем электрическом поле

$$U_{\mathrm{e}} = e\varphi - (\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}) + \frac{1}{6}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_k}D_{ik}\,,\ \mathbf{F}_{\mathrm{e}} = (\mathbf{d}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{E}\,,\ \mathbf{K}_{\mathrm{e}} = [\mathbf{d}\times\mathbf{E}].$$

Энергия магнитного диполя, сила и момент сил, действующих на него во внешнем магнитном поле:

$$\bar{U}_{\mathrm{m}} = -(\bar{\mathfrak{m}}\cdot\mathbf{H})\,, \quad \bar{\mathbf{F}}_{\mathrm{m}} = (\bar{\mathfrak{m}}\cdot\nabla)\mathbf{H}\,, \quad \overline{\mathbf{K}}_{\mathrm{m}} = [\bar{\mathfrak{m}}\times\mathbf{H}]\,.$$

Угловая скорость прецессии магнитного диполя: $\boldsymbol{\Omega} = -g\mathbf{H}\,.$

## 6. **Волновые уравнения и их решения**

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi \equiv \Box\varphi = 4\pi\rho\,, \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta\mathbf{A} \equiv \Box\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c}\,\boldsymbol{j}\,,$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\mathrm{div}\mathbf{A}=0\,,\quad \nabla^\mu\nabla_\mu=\Box=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\,.$$

Запаздывающие потенциалы

$$\varphi(\boldsymbol{r},t)=\iiint\frac{\rho\left(\boldsymbol{r}',t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,d^3\boldsymbol{r}'\,;$$

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{c}\iiint\frac{\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}',t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,d^3\boldsymbol{r}'\,.$$

Потенциалы Лиенара—Вихерта:

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{r},\,t)=\left.\frac{e\mathbf{v}}{cR\left(1-\frac{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})}{c}\right)}\right|_{t'},\quad \varphi(\boldsymbol{r},\,t)=\left.\frac{e}{R\left(1-\frac{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})}{c}\right)}\right|_{t'}.$$

$$\mathbf{R}(t')=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}(t')\,,\quad \mathbf{n}(t')=\mathbf{R}(t')/R(t')\,,\quad t=t'+R(t')/c\,.$$

Электромагнитное поле релятивистски-движущейся частицы:

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{r},\,t)=\frac{e\{c\,[\mathbf{w}\times\mathbf{n}]+[\mathbf{n}\times[\,[\mathbf{v}\times\mathbf{w}]\times\mathbf{n}]\,]\}}{c^3R\left(1-\frac{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})}{c}\right)^3}+\left.\frac{e\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)[\mathbf{v}\times\mathbf{n}]}{cR^2\left(1-\frac{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})}{c}\right)^3}\right|_{t'},$$

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{r},\,t)=\frac{e\,[\mathbf{n}\times[\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\times\mathbf{w}]\,]}{c^2R\left(1-\frac{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})}{c}\right)^3}+\left.\frac{e\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c}\right)}{R^2\left(1-\frac{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})}{c}\right)^3}\right|_{t'}.$$

## 7. Энергия и импульс электромагнитного поля

Плотность $W$ и поток $\mathbf{S}$ энергии электромагнитного поля

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\mathrm{div}\,\mathbf{S}=0\,,\quad W=\frac{\mathbf{E}^2+\mathbf{H}^2}{8\pi}\,,\quad \mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}\,[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]\,.$$

Плотность импульса $\vec{p}$ и тензор напряжений $\sigma_{ik}$ электромагнитного поля

$$\frac{\partial p_i}{\partial t}-\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}=0\,,$$

$$\vec{p}=\frac{1}{4\pi c}\,[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]=\frac{\mathbf{S}}{c^2}\,,\quad \sigma_{ik}=\frac{\mathrm{E}_i\mathrm{E}_k+\mathrm{H}_i\mathrm{H}_k}{4\pi}-W\delta_{ik}\,.$$

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

$$T^{(f)\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\sigma\rho}F^{\sigma\rho} - F^{\mu\sigma}F^{\nu}{}_{\sigma}\right);$$

$$T^{(f)\mu\nu} = \begin{pmatrix} W & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & -\sigma_{xx} & -\sigma_{xy} & -\sigma_{xz} \\ S_y/c & -\sigma_{yx} & -\sigma_{yy} & -\sigma_{yz} \\ S_z/c & -\sigma_{zx} & -\sigma_{zy} & -\sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W & \mathbf{S}/c \\ \mathbf{S}/c & -\sigma_{ik} \end{pmatrix}.$$

Баланс энергии-импульса электромагнитного поля и частиц

$$\frac{\partial T^{(f)\mu\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{1}{c}\mathrm{F}^{\mu\lambda}j_{\lambda} = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{S} + (\boldsymbol{j}\cdot\mathbf{E}) = 0, \quad \frac{\partial p_i}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho \mathrm{E}_i + \frac{1}{c}\left[\boldsymbol{j}\times\mathbf{H}\right]_i = 0.$$

## 8. **Плоская монохроматическая волна**

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}_0 e^{(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t)}\right\}, \quad \mathbf{E} = [\mathbf{H}\times\mathbf{n}],$$

$$\mathbf{H} = [\mathbf{n}\times\mathbf{E}], \quad (\mathbf{n}\cdot\mathbf{H}) = 0, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{k}, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Вектор поляризации

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{E}_0}{|\mathbf{E}_0|} = e_1\mathbf{e}^{(1)} + e_2\mathbf{e}^{(2)}, \quad \left((\mathbf{e}^{(1)}\cdot\mathbf{e}^{(2)*}) = 0,\ (\mathbf{e}^{(1,2)}\cdot\mathbf{n}) = 0\right).$$

Линейный базис

$$\mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{e}^{(x)},\ \mathbf{e}^{(2)} = \mathbf{e}^{(y)},\ (\mathbf{n}\parallel z),$$

циркулярный базис

$$\mathbf{e}^{(+1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{e}^{(x)} + i\mathbf{e}^{(y)}\right),\ \mathbf{e}^{(-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{e}^{(x)} - i\mathbf{e}^{(y)}\right).$$

Усреднение по времени

$$\overline{\left(\mathrm{Re}\left\{\mathbf{A}_0 e^{-i\omega t}\right\}\cdot\mathrm{Re}\left\{\mathbf{B}_0 e^{-i\omega t}\right\}\right)} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathbf{A}_0\cdot\mathbf{B}_0^*).$$

Усреднение по поляризации: $\overline{e_i e_k^*} = (\delta_{ik} - n_i n_k)/2$.

## 9. **Излучение и рассеяние электромагнитных волн**

Интенсивность мультипольного излучения

$$\frac{dI_d}{d\Omega} = \frac{[\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]^2}{4\pi c^3}\,, \quad I_d = \int \frac{dI_d}{d\Omega}\, d\Omega = \frac{2}{3c^3}\, \ddot{\mathbf{d}}^2\,;$$

$$I_m = \frac{2}{3c^3}\, \ddot{\mathbf{m}}^2\,; \quad I_q = \frac{1}{180c^5}\, \dddot{D}_{ik}\dddot{D}_{ik}\,.$$

Полная интенсивность излучения релятивистской частицы

$$I = \frac{2e^2 l^6}{3c^3} \left\{ \mathbf{w}^2 - \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{w}]^2}{c^2} \right\}.$$

Сила радиационного трения

$$\mathbf{F}_{fr} = \frac{2e^2}{3c^3}\, \ddot{\mathbf{v}}\,.$$

Сечение рассеяния

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3}\, r_0^2\,; \qquad r_0 = \frac{e^2}{mc^2}\,; \qquad \sigma = \sigma_T \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}\,.$$

# План семинаров

1. Преобразования Лоренца.
2. Тензорная математика.
3. Релятивистская кинематика.
4. Движение релятивистской частицы в скрещенных полях.
5. Адиабатический инвариант.
6. Движение и дрейф в слабонеоднородном магнитном поле.
7. Прием первого задания.
8. Уравнение Пуассона в электростатике.
9. Квадрупольный момент.

10. Поле гармонически колеблющегося диполя.
11. Излучение при столкновениях.
12. Синхротронное излучение.
13. Рассеяние света осциллятором.
14. Прием второго задания.
15. Прием заданий.

# ЗАДАНИЕ

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА
1-е задание

1. Начало координат системы $K'$ движется со скоростью $\mathbf{V} = (V_x, V_y)$ относительно системы $K$, а оси координат составляют со скоростью $\mathbf{V}$ те же самые углы, что и оси системы $K$. Записать матрицу преобразований Лоренца от системы $K$ к системе $K'$ (а также обратного преобразования). Определить положение осей $(x', y')$ в системе $K$ в момент времени $t = 0$ по часам системы $K$.
   Указание: представить радиус-вектор в виде суммы параллельного и перпендикулярного скорости $\mathbf{V}$ векторов: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_\parallel + \boldsymbol{r}_\perp$, где $\boldsymbol{r}_\parallel = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{V})\mathbf{V}/V^2\,, \quad \boldsymbol{r}_\perp = \boldsymbol{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{V})\,\mathbf{V}/V^2\,.$

2. Определить относительную скорость сталкивающихся протонов в ускорителе со встречными пучками, если энергия протонов в каждом пучке 5000 ГэВ. Какова должна быть энергия налетающих протонов, чтобы столкновение с покоящимся протоном происходило с той же относительной скоростью?

3. Доказать, что трехмерные тензоры $\delta_{ik}$ и $\epsilon_{ikl}$ являются инвариантными тензором и псевдо-тензором соответственно относительно ортогональных преобразований координат. Вычислить свертки
   а) $\delta_{ik}\delta_{kl}\delta_{ln}\delta_{ni}$;
   б) $\epsilon_{ikl}\epsilon_{njl}$, $\epsilon_{ikl}\epsilon_{nkl}$, $\epsilon_{ikl}\epsilon_{ikl}$;
   покоординатно проверить, что $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ эквивалентно $c_i = \epsilon_{ikl}a_k b_l$.

4. Раскрыть в тензорных обозначениях выражения:
$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}$, $\operatorname{rot}[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]$, $\operatorname{rot}(f\mathbf{A})$, $\operatorname{div}(f\mathbf{A})$, $\operatorname{div}[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]$, $\operatorname{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$.
Вычислить: а) $\Delta(1/r)$, $(\Delta+k^2)(\exp(ikr)/r)$;
б) $\operatorname{rot}[\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}]$, $\operatorname{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})$, где $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{a}$ — постоянные векторы;
в) $\operatorname{grad}r$, $\operatorname{div}\boldsymbol{r}$, $(\mathbf{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{r}$, $\operatorname{grad}f(r)$, $\operatorname{rot}\mathbf{a}(r)$, $\operatorname{div}\mathbf{a}(r)$, $\quad(r\equiv|\boldsymbol{r}|)$.

5. Для получения $l$-квантов высокой энергии навстречу пучку электронов с энергией $\mathcal{E}=200$ ГэВ выстреливает лазер с энергией фотонов $\varepsilon=2$ эВ. Какую энергию будут иметь фотоны, рассеянные назад? Найти зависимость энергии фотонов от угла рассеяния (в т.ч. построить график).

6. В ускорителе на встречных пучках идет реакция

$$e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-\,.$$

Зная энергию $\mathcal{E}^+$ и $\mathcal{E}^-$ каждого из пучков $e^+$ и $e^-$ соответственно, найти энергию и импульсы $\mu^+$ и $\mu^-$. Каков энергетический порог этой реакции в общем случае $\mathcal{E}^+\neq\mathcal{E}^-$. Исследовать предел, когда оба пучка являются ультрарелятивистскими. Сравнить порог реакции в частном случае $\mathcal{E}^+=\mathcal{E}^-$ с порогом в случае, когда ускоренные позитроны падают на неподвижные электроны.

7. Для нейтрино, образующихся при распаде $\pi$-мезонов с энергией 6 ГэВ (масса $\pi$-мезона $\approx 140$ МэВ, масса $\mu$-мезона $\approx 105$ МэВ), определить энергетический спектр, их максимальную и среднюю энергии и угловое распределение, если известно, что в системе покоя $\pi$-мезона распад $\pi\to\mu+\nu$ происходит изотропно.

8. * Плоское зеркало движется со скоростью $V$ в направлении своей нормали. На зеркало падает монохроматическая волна под углом $\theta$ к нормали. Определить направление и частоту отраженной волны, считая, что для покоящегося зеркала справедлив обычный закон отражения.

9. Показать, что однородное магнитное поле $\mathbf{H}$, направленное по оси $z$, может быть описано векторным потенциалом

$$\mathbf{A}=\{0,\mathrm{H}x,0\}\,.$$

Калибровочным преобразованием перейти к потенциалу $\mathbf{A} = [\mathbf{H}\times\boldsymbol{r}]/2$.

10. Найти движение релятивистской частицы массы $m$ и заряда $e$ в перпендикулярных однородных и постоянных электрическом и магнитном полях $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. В случае $|\mathbf{E}| < |\mathbf{H}|$ определить скорость дрейфа.

11. Частица с массой $m$ и зарядом $e$ движется в однородном магнитном поле в плоскости, перпендикулярной направлению поля. Определить изменение энергии частицы за один оборот, если магнитное поле медленно меняется со временем (так, что изменение поля за период движения мало по сравнению с самим значением поля). Доказать, что величина $p_\perp^2/\mathrm{H}$ остается постоянной (т.е. является адиабатическим инвариантом). Вычислить изменение радиуса орбиты и энергии частицы, если поле изменилось от значения $\mathrm{H}_1$ до $\mathrm{H}_2$. Получить формулу для адиабатического инварианта в случае, когда импульс частицы направлен произвольно.

12. Магнитное поле, направленное по оси $z$ вдоль этой оси, убывает с постоянным градиентом $\partial \mathrm{H}_z/\partial z = -h = \mathrm{const}$. Может ли поле во всем пространстве оставаться параллельным оси $z$? Найти радиальные компоненты поля вне оси $z$. Представить картину силовых линий.

13. Получить формулу $\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla)\mathbf{H}$ для силы, действующей на магнитный диполь в неоднородном постоянном магнитном поле, и найти (в релятивистском случае) уравнение движения ведущего центра орбиты заряженной частицы и скорость дрейфа. (Поле мало меняется на расстояниях порядка радиуса орбиты.)

14. * На больших расстояниях магнитное поле Земли представляет собой поле магнитного диполя $\mathbf{H}(\boldsymbol{r}) = \{3\boldsymbol{r}(\mathfrak{m} \cdot \boldsymbol{r}) - r^2\mathfrak{m}\}/r^5$ с магнитным моментом

$$\mathfrak{m} = 8.1 \cdot 10^{25} \text{Гс} \cdot \text{см}^3\,.$$

а) Найти в полярных координатах уравнение силовой линии магнитного диполя. Определить, как меняется поле вдоль силовой линии. б) Предполагая, что скорость частицы на экваторе составляет угол $i$ с плоскостью экватора, определить максимальную широту (полярный угол), достигаемую частицей. Найти угол $i$, при котором частица достигнет поверхности Земли, если расстояние от Земли, на котором частица находилась в экваториальной плоскости, значительно больше радиуса Земли. в) Используя результаты предыдущей задачи 13, найти период дрейфа вокруг

Земли протона с энергией 10 МэВ, движущегося в экваториальной плоскости на расстоянии 30 000 км от Земли.

## 2-е задание

15. Определить потенциальную энергию взаимодействия двух точечных диполей с моментами $\mathbf{d}_1$ и $\mathbf{d}_2$.

16. Заряды ядра и электронного облака в основном состоянии атома водорода образуют следующую объёмную плотность заряда

$$\rho(r) = e\delta(\boldsymbol{r}) - \frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right),$$

где $e > 0$ — элементарный заряд, $a \sim 10^{-8}$ см — боровский радиус, а первое и второе слагаемое соответствуют ядру и электрону соответственно. Найти электростатический потенциал такой системы. Найти энергию взаимодействия электронного облака с ядром. Найти поправку к этой энергии, положив ядро равномерно заряженным шаром радиуса $r_{\text{я}} \sim 10^{-13}$ см.

17. Найти тензор квадрупольного момента равномерно заряженного эллипсоида с зарядом $Q$ и полуосями $a$, $b$ и $c$ относительно его центра. Найти электрическое поле на больших расстояниях, считая, что в центре эллипсоида находится компенсирующий точечный заряд $-Q$. Построить график угловой зависимости радиальной компоненты электрического поля в плоскости $Oxy$ в случае, когда $2c^2 = a^2 + b^2$, $a > b$.

18. Рассмотрите функции углов, являющиеся произведениями компонент единичного вектора:

$$n_i, \quad n_i n_k, \quad n_i n_k n_l, \quad n_i n_k n_l n_n, \quad n_i n_k n_l n_n n_j.$$

Проведите усреднение этих функций по единичной сфере $n_i n_i = 1$. Используя первые три функции составьте функции, пропорциональные сферическим гармоникам порядков $l = 1, 2, 3$.

19. Определить электрическое и магнитное поля гармонически колеблющегося диполя на расстояниях, много больших размеров диполя (но необязательно больших длины волны). Исходя из полученного общего результата, рассмотреть предельные случаи волновой и квазистатической зон.

20. Два одноименных заряда ($e_1, m_1; e_2, m_2$; $e_1 e_2 > 0$) испытывают лобовое столкновение. Определить излученную энергию, если задана относительная скорость на бесконечности $v_\infty \ll c$. Отдельно рассмотреть случай $e_1/m_1 = e_2/m_2$ (квадрупольное излучение).

21. * Два противоположных заряда ($e_1, m_1; e_2, m_2$; $e_1 e_2 < 0$) обращаются один вокруг другого по круговой орбите радиуса $R$. Определить энергию, теряемую на излучение за один оборот. Найти зависимость расстояния между зарядами от времени.

22. Найти энергию излучения релятивистского электрона в однородном магнитном поле за один оборот, а также закон изменения энергии электрона и радиуса его орбиты со временем за счет потерь на излучение. Найти мощность синхротронного излучения в ускорителе на встречных пучках электронов и позитронов с энергией 100 ГэВ. Длина окружности ускорителя 30 км, число ускоряемых частиц в кольце — $5 \cdot 10^{12}$. Оценить характерную длину волны излучения.

23. Релятивистский электрон пролетает со скоростью $V$ через плоский конденсатор, к которому приложено переменное электрическое поле с частотой $\omega_0$. Найти частоту излучения электрона в зависимости от угла $\theta$ между наблюдателем и направлением движения электронного пучка.

24. Найти дифференциальное и полное сечения рассеяния естественного света с частотой $\omega$ (а также линейно поляризованного света) осциллятором с затуханием.

25. * Найти сечение рассеяния линейно поляризованного света на идеально проводящем металлическом шаре радиуса $R$ в пределе $R \ll \lambda$.

Первая контрольная работа и сдача I-го задания:
16.10–22.10.2017 г.
Вторая контрольная работа и сдача II-го задания:
11.12–17.12.2017 г.

Усл. печ. л. 1,5. Тираж 80 экз.