

Задачи по Теории поля

Рекомендуемая литература

Батыгин, В. & Топтыгин, И. (2002). *Сборник задач по электродинамике*. РХД.

Ландау, Л. & Лифшиц, Е. (2014). *Теоретическая физика. В 10 томах. Том 2. Теория поля. Учебное пособие для вузов*. ФИЗМАТЛИТ.

Из задач, предлагаемых к каждому семинару надо решить столько, чтобы набрать 10 баллов. Баллы за сложные задачи разбиты по подзадачам, соответственно необходимые 10 баллов можно собирать отдельно по этим подзадачам.

Семинар 1

Преобразование Лоренца. Матричная экспонента. Быстрота. Сокращение Лоренца. Собственное время.

• *Задача 1 (2 балла):*

Длину стержня, движущегося вдоль своей оси в некоторой системе отсчета, можно измерять таким образом: измерять промежуток времени, в течение которого стержень проходит мимо фиксированной точки этой системы, и умножать его на скорость стержня. Показать, что при таком методе измерения получается обычное лоренцово сокращение.

• *Задача 2 (2 балла):*

Рассмотрите ‘парадокс’ двух близнецов: близнец A всё время покоится, а близнец B сначала движется от A со скоростью v вдоль Ox , а потом с этой же скоростью движется обратно к нему. Когда они встречаются, близнец A постарел с момента расставания на время T , а близнец B оказался моложе, постарев на время $T_B < T$.

а) Выразите время T_B через v и T .

б) Может возникнуть недоумение: ведь близнец B двигался с ускорением совсем немного, когда разворачивался в обратный путь. Во все остальные моменты можно сказать, что B покоился, а A двигался равномерно и прямолинейно. Постройте на плоскости Oxt мировые линии движения A и B и убедитесь, что в пространстве Минковского неравенство треугольника не имеет места.

• *Задача 3 (4 балла):*

Рассмотрев инфинитезимально малые ортогональное преобразование и преобразование Лоренца, посчитайте количество независимых непрерывных параметров в этих преобразованиях.

а) Совершите N последовательных поворотов на угол ϕ/N вокруг оси Oz в трёхмерном пространстве, $N \rightarrow \infty$. Получите соответствующую матричную экспоненту.

б) Совершите N последовательных переходов Лоренца характеризующихся относительной скоростью движения систем отсчёта вдоль оси Ox со скоростью φ/N . С какой относительной скоростью v движутся первая и последняя система отсчёта? Параметр φ называется быстротой.

• *Задача 4 (4 балла):*

Начало координат системы K' движется со скоростью $\mathbf{V} = (V_x, V_y)$ относительно системы K , а оси координат составляют со скоростью \mathbf{V} те же самые углы, что и оси

системы K . Записать матрицу преобразований Лоренца от системы K к системе K' (а также обратного преобразования).

- а) (2 балла) Указание: представить радиус-вектор в виде суммы параллельного и перпендикулярного скорости \mathbf{V} векторов: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}$, где $\mathbf{r}_{\parallel} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{V})\mathbf{V}/V^2$, $\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{V})\mathbf{V}/V^2$.
- б) (2 балла) Определить положение осей (x', y') в системе K в момент времени $t = 0$ по часам системы K .

Семинар 2

Масса покоя частицы. Полная энергия частицы. Масса составной системы.

- **Задача 5 (2 балла):**

Найти скорость v частицы с массой m и зарядом q , прошедшей разность потенциалов U (начальная скорость частицы равна нулю). Упростить общую формулу для нерелятивистского и ультрарелятивистского случая (учесть по два члена разложения).

- **Задача 6 (5 баллов):**

Определить относительную скорость сталкивающихся протонов в ускорителе со встречными пучками, если энергия протонов в каждом пучке 5000 ГэВ (приблизительные параметры ЛНС). Какова должна быть энергия налетающих протонов, чтобы столкновение с покоящимся протоном происходило с той же относительной скоростью? Энергия покоя протона равна 938.26 МэВ. В процессе решения задачи ответьте, в частности, на следующие вопросы:

- (2 балла) Чему равен γ -фактор для протонов в лабораторной системе координат и в системе координат, где один из пучков покоится?
- (2 балла) Чему равны абсолютные значения скорости и импульса частицы в ультрарелятивистском пределе, когда $\gamma \gg 1$? Свяжите непосредственно между собой импульс и скорость.
- (1 балл) Посчитайте скорость протонов в лабораторной системе координат и относительную скорость сталкивающихся протонов.

- **Задача 7 (6 баллов):**

Если коллайдер на встречных пучках работает в штатном режиме, то при столкновении двух протонов интересующая нас реакция X происходит с превышением её порога в α раз. Однако из-за неполадок

- (3 балла) оба пучка имеют энергию, составляющую только часть ϵ от номинальной. При каком значении ϵ порог реакции X достигнут не будет?
- (3 балла) один из двух пучков в коллайдере имеет энергию, составляющую часть ϵ от номинальной. При каком значении ϵ порог реакции X достигнут не будет? Пучки считать релятивистскими, так что $\gamma \gg \alpha^2$.

Семинар 3

Распад частиц на две

• **Задача 8 (4 балла):**

π^0 -мезон распадается на лету на два γ -кванта. Показать, что минимальный угол θ_{min} разлета γ -квантов определяется условием

$$\cos \frac{\theta_{min}}{2} = \frac{v}{c}$$

в той системе отсчета, в которой скорость π^0 -мезона равна v .

• **Задача 9 (10 баллов):**

Для нейтрино, образующихся при распаде π^\pm -мезонов с энергией 6 ГэВ (масса π -мезона ≈ 140 МэВ, масса μ -мезона ≈ 106 МэВ), определить энергетический спектр, их максимальную и среднюю энергии и угловое распределение, если известно, что в системе покоя π -мезона распад $\pi \rightarrow \mu + \nu$ происходит изотропно. При решении задачи ориентируйтесь на следующую последовательность действий:

- а) (1 балл) Найдите энергию вылетающего нейтрино в системе отсчёта покоя π -мезона.
- б) (2 балла) Оставаясь в этой системе отсчёта, запишите условие статистической изотропности распада π -мезона в сферических координатах; выберите θ' – угол между направлением движения π -мезона в лабораторной системе (ось Oz') и направлением вылета нейтрино. найдите плотность вероятности $\mathcal{P}'(\theta')$, описывающую направление вылета нейтрино.
- в) (2 балла) Запишите закон преобразования Лоренца для 4-импульса нейтрино; для простоты вычислений считайте, что импульс нейтрино лежит в плоскости Oxz .
- г) (2 балла) Установите закон преобразования угла $\theta(\theta')$ при переходе в лабораторную систему координат
- д) (3 балла) Релятивистским инвариантом является доля вероятности. Основываясь на этом, запишите закон преобразования для плотности вероятности, найдя $\mathcal{P}(\theta)$. Постройте график $\mathcal{P}(\theta)$, учитывая наличие большого параметра $\gamma \gg 1$.
- е) (4 балла) Установите зависимость энергии нейтрино в лабораторной системе координат в зависимости от угла вылета, $\varepsilon(\theta')$. Найдите плотность вероятности $\mathcal{P}_\varepsilon(\varepsilon)$.

Семинар 4

Рассеяние частиц друг на друге

• **Задача 10 (6 баллов):**

Для получения γ -квантов высокой энергии навстречу пучку электронов с энергией $\mathcal{E} = 200$ ГэВ выстреливает лазер с энергией фотонов $\varepsilon = 2$ эВ. Какую энергию будут иметь фотоны, рассеянные назад? Найти зависимость энергии фотонов от угла рассеяния (в т.ч. построить график). Указание:

- (3 балла) Записать условие сохранения импульса при столкновении. Для того, чтобы исключить неинтересный импульс электрона после столкновения, удобно его одного оставить в правой части уравнения. Затем возвести это равенство 4-векторов в квадрат.
- (3 балла) В задаче есть два малых параметра: отношение энергий налетающих друг на друга фотона и электрона, ε/E , и $1/\gamma$, где γ -фактор относится к налетающему электрону. Сравните относительное влияние этих двух параметров на зависимость энергии рассеянного фотона.

• **Задача 11 (4 балла):**

Плоское зеркало движется со скоростью V в направлении своей нормали. На зеркало падает монохроматическая волна под углом θ к нормали. Определить направление и частоту отраженной волны, считая, что для покоящегося зеркала справедлив обычный закон отражения.

Семинар 5

Свойства стационарного электромагнитного поля

• *Задача 12 (3 балла):*

В системе отсчёта S электрическое и магнитное поле взаимно перпендикулярны: $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$. С какой скоростью относительно S должна двигаться система S' , в которой имеется только электрическое или только магнитное поле? Всегда ли существует решение и единственно ли оно.

• *Задача 13 (3 балла):*

Показать, что однородное магнитное поле \mathbf{H} , направленное по оси z , может быть описано векторным потенциалом

$$\mathbf{A} = \{0, Hx, 0\}.$$

Калибровочным преобразованием перейти к потенциалу $\mathbf{A} = [\mathbf{H} \times \mathbf{r}] / 2$.

• *Задача 14 (2 балла):*

Какой вид имеет уравнение для потенциала покоящегося точечного заряда в случае калибровки потенциалов условием $\varphi = 0$? Чему в этом случае равен этот потенциал?

• *Задача 15 (2 балла):*

В системе отсчёта S имеется однородное электромагнитное поле \mathbf{E} и \mathbf{H} . С какой скоростью относительно S должна двигаться система S' , в которой $\mathbf{E}' \parallel \mathbf{H}'$? Всегда ли существует решение и единственно ли оно. Чему равны абсолютные величины \mathbf{E}' и \mathbf{H}' ?

Семинар 6

Движение частицы в однородном поле: движение частицы в однородном магнитном поле; дрейф частицы в однородных скрещенных сильном магнитном и слабом электрическом полях; движение частицы в однородном электрическом поле.

- **Задача 16 (2 балла):**

Определить движение релятивистской частицы массы m и заряда e в однородном магнитном поле \mathbf{H} .

- **Задача 17 (6 баллов):**

Найти движение релятивистской частицы массы m и заряда e в перпендикулярных однородных и постоянных электрическом и магнитном полях \mathbf{E} и \mathbf{H} в случае $|\mathbf{E}| < |\mathbf{H}|$. Определить скорость дрейфа. Предлагаемая схема решения:

- а) Записать уравнение движения частицы в системе координат, в которой электрическое поле отсутствует. (Удобно выбрать такую систему координат, скорость движения которой относительно лабораторной имеет нулевую проекцию на магнитное поле.)
- б) Записать траекторию движения частицы в лабораторной системе координат в параметрическом виде с временем в движущейся системе отсчёта в качестве параметра.
- в) Изобразить траекторию движения частицы в проекции на плоскость, нормальную к магнитному полю
- г) Для нерелятивистской частицы ($\gamma \approx 1$) уравнения движения оказываются несложным решить непосредственно в лабораторной системе координат. Записать уравнения движения и убедиться в этом.

- **Задача 18 (2 балла):**

Найти движение релятивистской частицы массы m и заряда e в однородном электрическом поле \mathbf{E} .

- **Задача 19 (4 балла):**

Найти движение релятивистской частицы массы m и заряда e в перпендикулярных однородных и постоянных электрическом и магнитном полях \mathbf{E} и \mathbf{H} в случае $|\mathbf{E}| > |\mathbf{H}|$. Определить направление движения на больших временах.

Семинар 7

Сила, действующая на магнитный диполь со стороны магнитного поля. Поле, создаваемое магнитным диполем. Адиабатический инвариант.

• *Задача 20 (6+1 баллов):*

Получить формулу $\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathbf{H}$ для силы, действующей на магнитный диполь в неоднородном постоянном магнитном поле. Указание:

- Точное выражение для силы действующей на систему токов с плотностью $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ есть $\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{r} [\mathbf{j} \times \mathbf{H}]$. Выбрав начало координат где-то внутри системы токов, представьте магнитное поле в виде аппроксимации $\mathbf{H}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{H}|_{r=0} + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{H}|_{r=0}$.
- (1 балл) Покажите, что вклад от нулевого члена разложения в силу равен нулю
- (5 баллов) Вычислите вклад от первого члена разложения. Воспользуйтесь тем, что любому аксиальному вектору μ^i можно в однозначное соответствие поставить антисимметричный тензор $\mu^{ik} = -\mu^{ki} = \epsilon^{ikl} \mu^l$, а также тем, что из условия бездивергентности тока $\text{div } \mathbf{j} = 0$ следует, в частности, тождество

$$\int d^3\mathbf{r} (r^i j^k + r^k j^i) = \int d^3\mathbf{r} \partial_m (r^i r^k j^m) = 0.$$

- (1 балл) Вычислите момент сил, действующих на магнитный диполь. Указание: Для этого достаточно знать только значение поля в окрестности системы.

• *Задача 21 (4 балла):*

Нерелятивистская частица с массой m и зарядом e движется в однородном магнитном поле. Магнитное поле медленно меняется со временем — так, что изменение поля за период движения мало по сравнению с самим значением поля. Доказать, что величина v_{\perp}^2/H остаётся постоянной (т.е. является адиабатическим инвариантом), где v_{\perp} есть проекция скорости частицы на плоскость нормальную к полю. Показать, что адиабатический инвариант пропорционален величине магнитного диполя, создаваемого движением частицы по окружности. Вычислить изменение радиуса орбиты и энергии частицы, если поле изменилось от значения H_1 до H_2 . Указание:

- (2 балла) Определить изменение энергии частицы за один оборот — это работа, совершаемая вихревым электрическим полем.
- (2 балла) Составить конечно-разностное уравнение с шагом в один период, его интеграл является искомым адиабатическим инвариантом.

• *Задача 22 (3 балла):*

Вычислить магнитное поле на далёких расстояниях от системы стационарных токов.

Семинар 8

Движение частицы в слабо неоднородном магнитном поле.

• *Задача 23 (7 баллов):*

Найти уравнение движения ведущего центра орбиты заряженной нерелятивистской частицы и скорость дрейфа (заряд e и масса m). Поле слабо неоднородно, т.е. слабо меняется на расстояниях порядка радиуса орбиты. Указания:

- Разделите движение частицы с траекторией $\mathbf{r}(t)$ на быстрое движение (с большим ускорением) по окружности вокруг линии магнитного поля и на медленное движения (с малым ускорением) ведущего центра: $\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t) + \boldsymbol{\xi}(t)$. Разделите скорость движения частицы на компоненты вдоль и поперёк линии магнитного поля \mathbf{H} , $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_\perp + \mathbf{h}v_\parallel$, $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H$ — единичный вектор направленный вдоль магнитного поля. В главном приближении $\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{v}_\perp$.
- (1 балл) Определите величину магнитного диполя через \mathbf{H} и v_\perp .
- (1 балл) Произведите усреднение уравнения движения частицы по одному периоду быстрого движения, получив уравнение на движения ведущего центра. Для быстрого движения надо воспользоваться результатом для силы действующей на магнитный диполь.
- (1 балл) Уравнение на ведущий центр надо решать методом последовательных приближений. Малый параметр в этой схеме — отношение $\xi/L \ll 1$, где L — характерный масштаб изменения магнитного поля. Для скорости движения ведущего центра это разложение имеет вид $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V}_\parallel + \mathbf{V}_d$, где $\mathbf{V}_\parallel = \mathbf{h}v_\parallel$ есть скорость движения вдоль линии магнитного поля, а \mathbf{V}_d — поперёк.
- (2 балла) Спроектируйте уравнение движения ведущего центра на направление магнитного поля. Найдите закон изменения v_\parallel . Покажите сохранение адиабатического инварианта.
- (2 балла) Спроектируйте уравнение движения ведущего центра на плоскость нормальную к магнитному полю. Найдите скорость дрейфа.

• *Задача 24 (3 балла):*

По бесконечному прямому проводу течёт постоянный ток I . Найдите движения ведущего центра частицы, движущейся в магнитном поле этого провода. Сформулируете критерий применимости приближения слабо неоднородного магнитного поля.

• *Задача 25 (7 баллов):*

Две соосные одинаковые катушки находятся на расстоянии L друг от друга, направление магнитного потока в них сонаправленное. По катушкам течёт ток I , погонная

плотность намотки равна ρ . Радиус катушек R мал по сравнению с L , а их длина велика по сравнению с L . Кроме того, вдоль оси катушек приложено слабое однородное электрическое поле E . Частица начинает двигаться от положения по середине между катушками на их оси, причём скорость частицы составляет угол $(1 - \epsilon)\pi/2$ с осью, где $\epsilon \ll 1$. Радиус ларморовской орбиты мал по сравнению с L . Описать дальнейшее движение частицы. Указание: магнитное поле в области посередине между катушками приблизьте квадратичной зависимостью в направлении оси катушек.

Семинар 9

Закон Кулона. Центральное-симметричное распределение зарядов и создаваемое ими поле. Мультипольное разложение. Дипольный и квадрупольный моменты.

• **Задача 26 (4 балла):**

Заряды ядра и электронного облака в основном состоянии атома водорода образуют следующую объёмную плотность заряда

$$\rho(r) = e\delta(\mathbf{r}) - \frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right),$$

где $e > 0$ — элементарный заряд, $a \sim 10^{-8}$ см — боровский радиус, а первое и второе слагаемое соответствуют ядру и электрону соответственно. Найти электростатический потенциал такой системы. Найти энергию взаимодействия электронного облака с ядром. Найти поправку к этой энергии, положив ядро равномерно заряженным шаром радиуса $r_{\text{я}} \sim 10^{-13}$ см.

• **Задача 27 (2 балла):**

Определить потенциальную энергию взаимодействия двух точечных диполей с моментами \mathbf{d}_1 и \mathbf{d}_2 .

• **Задача 28 (4 балла):**

Найти тензор квадрупольного момента равномерно заряженного эллипсоида с зарядом Q и полуосями a , b и c относительно его центра. Найти электрическое поле на больших расстояниях, считая, что в центре эллипсоида находится компенсирующий точечный заряд $-Q$. Построить график угловой зависимости радиальной компоненты электрического поля в плоскости Oxy в случае, когда $2c^2 = a^2 + b^2$, $a > b$.

Семинар 10

Электромагнитные волны в вакууме. Гауссов монохроматический пучок, уравнение Шредингера, угол дифракции.

- **Задача 29 (1 балл):**

Чему равна Фурье-амплитуда плоской монохроматической волны?

- **Задача 30 (1 балл):**

Найти тензор энергии-импульса линейно поляризованной бегущей плоской монохроматической волны. То же для стоячей волны.

- **Задача 31 (2 балла):**

Построить одномерный волновой пакет Ψ для момента времени $t = 0$, выбрав распределение амплитуд по волновым векторам в виде гауссового распределения

$$a_0 \exp \left[- \left(\frac{k - k_0}{\Delta k} \right)^2 \right],$$

где a_0 , k_0 , Δk - постоянные. Найти связь между шириной пакета Δx и интервалом волновых чисел Δk , вносящих основной вклад в суперпозицию.

- **Задача 32 (2 балла):**

Волновой пакет Ψ образован суперпозицией плоских волн с разными частотами. Распределение амплитуд по частоте имеет вид:

$$a_0 \exp \left[- \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta \omega} \right)^2 \right],$$

(гауссово распределение), где a_0 , ω_0 , $\Delta \omega$ - постоянные. Найти зависимость амплитуды пакета от времени в точке $x = 0$. Получить связь между длительностью волнового импульса Δt и интервалом частот $\Delta \omega$.

- **Задача 33 (5 баллов):**

Рассмотрите распространение гауссового аксиально симметричного монохроматического пучка (частота ω , направление распространения вдоль оси Oz). Гауссов пучок имеет плоский фронт на выходе испускающего его устройства, так что при $z = 0$ характеризуется поперечным профилем амплитуды волны $\exp(-\rho^2/2\sigma_0)$ с действительным σ_0 , где $\rho^2 = x^2 + y^2$ — квадрат поперечной координаты. Сечение пучка велико по сравнению с квадратом длины волны, то есть величина $\sigma_0 \gg \lambda^2$, где λ — длина волны.

- (1 балл) Запишите волновое уравнение, перейдя к комплексным амплитудам. Волна слабо отличается от бегущей монохроматической. Выделите в амплитуде волны соответствующий быстро осциллирующий множитель и напишите уравнение на медленно меняющуюся огибающую.

- (1 балл) Замените получившееся уравнение приближённым уравнением исходя из того, что огибающая меняется вдоль направления распространения гораздо медленнее чем поперёк него.
- (1 балл) Решите получившееся уравнение Шредингера.
- (1 балл) Рассмотрев далёкие расстояния, найдите угол дифракции: по определению, угол дифракции есть угол, на который расходится пучок при удалении от источника.
- (1 балл) По мере распространения пучка волновой фронт перестаёт быть плоским. Изобразите форму волновых фронтов на расстояниях $z \ll k\sigma_0$ и $z \gg k\sigma_0$.

Семинар 11

Излучение волн нерелятивистскими источниками. Дипольное излучение; ближняя зона и волновая зона. Интенсивность излучения.

- **Задача 34 (2 балла):**

Показать, что в волновой зоне при Лоренцевой калибровке потенциалов скалярный потенциал ограниченной излучающей системы может быть выражен через векторный потенциал формулой $\varphi = \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}$.

- **Задача 35 (2 балла):**

Записать уравнения, которому удовлетворяет векторный потенциал \mathbf{A} , если вместо лоренцевой калибровки

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

использовать калибровку потенциалов вида $\varphi = 0$.

- **Задача 36 (6 баллов):**

Определить электрическое и магнитное поля гармонически колеблющегося диполя на расстояниях, много больших размеров диполя (но необязательно больших длины волны). Исходя из полученного общего результата, рассмотреть предельные случаи волновой и квазистатической зон.

- **Задача 37 (2 балла):**

Определить излучение диполя d , вращающегося в одной плоскости с постоянной угловой скоростью Ω .

Семинар 12

Излучение одиночными движущимися с ускорением зарядами. Рассеяние света на свободных зарядах.

- **Задача 38 (2 балла):**

Электрон движется по окружности в постоянном магнитном поле \mathbf{H} . Найти закон изменения его кинетической энергии во времени $\mathcal{E}(t)$. Найти траекторию электрона в нерелятивистском пределе $v \ll c$.

- **Задача 39 (4 балла):**

Найти энергию излучения релятивистского электрона в однородном магнитном поле за один оборот, а также закон изменения энергии электрона и радиуса его орбиты со временем за счет потерь на излучение. Найти мощность синхротронного излучения в ускорителе на встречных пучках электронов и позитронов с энергией 100 ГэВ. Длина окружности ускорителя 30 км, число ускоряемых частиц в кольце — $5 \cdot 10^{12}$. Оценить характерную длину волны излучения.

- **Задача 40 (4 балла):**

Определить частоту (ω') света, рассеянного движущимся зарядом. Считать, что в системе отсчёта, где электрон покоится, энергия квантов света (фотонов) мала по сравнению с его массой покоя.

Семинар 13

Запаздывающие потенциалы Лиенара-Вихерта

- **Задача 41:**

Показать, что электрическое поле равномерно движущегося точечного заряда “сплющивается” в направлении движения. При этом происходит ослабление поля E на линии движения по сравнению с кулоновым полем. Как согласуется это ослабление с формулой преобразования $E_{\parallel} = E'_{\parallel}$?

- **Задача 42:**

Найти потенциалы и поля φ , \mathbf{A} , \mathbf{E} , \mathbf{H} точечного заряда q , движущегося равномерно со скоростью \mathbf{V} , произведя преобразование Лоренца от системы отсчёта, где заряд покоится.

- **Задача 43:**

Релятивистский электрон пролетает со скоростью V через плоский конденсатор, к которому приложено переменное электрическое поле с частотой ω_0 . Найти частоту излучения электрона в зависимости от угла θ между наблюдателем и направлением движения электронного пучка.