

Материалы по курсу “Теория поля”
Разработаны Сергеем Сергеевичем Вергелесом

МФТИ, Долгопрудный
9 декабря 2017 г.

Вергелес С.С. “Теория поля. Электродинамика.” Лекции в МФТИ. 2016.

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ ДЛЯ ФАКУЛЬТЕТА ФКЭ МФТИ

Вопросы, которые надо знать студенту, желающему сдать экзамен не менее чем на три балла из десяти

- 1) Уравнения Максвелла. Связь электрического и магнитного полей с 4-потенциалом.
- 2) Полная энергия и импульс свободной частицы массы m , движущейся со скоростью v .
- 3) Лоренцевский буст. Как преобразуются время и координата, энергия и импульс?
- 4) Сила Лоренца, действующая на движущийся заряд со стороны электромагнитного поля
- 5) Интенсивность электро-дипольного излучения и его угловое распределение.

Вопросы, которые надо знать студенту, желающему сдать экзамен не менее чем на пять баллов из десяти

- 6) Почему самые мощные коллайдеры строят по схеме встречных пучков, и не используют схему с неподвижной мишенью?
- 7) Как движется заряженная массивная частица в перпендикулярных друг другу электрическом и магнитном полях, если магнитное поле сильнее электрического по амплитуде?
- 8) Плотность энергии и поток энергии (вектор Умова-Пойнтинга), связанные с электромагнитным полем
- 9) Энергия диполя во внешнем статическом поле. Сила и момент сил, действующие на диполь со стороны поля.
- 10) Что такое магнитный диполь? Как его вычислить по известному распределению токов? Что такое магнито-дипольное излучение?
- 11) Каково распределение по направлениям интенсивности излучения ультрарелятивистского, движущегося с ускорением заряда?

Список тем и билеты на экзамен

- 1) Постулаты специальной теории относительности. Преобразование Лоренца, интервал. Преобразование Галилея. § 2.1, § 2.2
- 2) Закон преобразования скоростей при преобразовании Лоренца. § 2.3
- 3) 4-ток. Уравнение непрерывности и закон сохранения. Связь компонент 4-тока с траекториями точечных зарядов. § 2.4 без 2.4.4
- 4) Уравнение движения свободной частицы. Понятие действия, его вариация. Безмассовые частицы. § 3.1
- 5) Понятие тензора энергии-импульса. Законы сохранения. § 3.3.
- 6) Распад и столкновения частиц. § 3.2 без 3.3.2
- 7) Момент импульса. § 4.4
- 8) Движение частицы в электромагнитном поле. § 3.4
- 9) Движение частицы в скрещенных магнитном и электрическом полях. Движение частицы в слабонеоднородном магнитном поле, адиабатический инвариант. § 8.1, Ландау и Лифшиц (1988, §§20-22)
- 10) Свойства электромагнитного поля. § 4.1
- 11) Уравнения движения электромагнитного поля. Действие, его вариация. Запаздывающие потенциалы. § 4.2
- 12) Тензор энергии-импульса для совокупности частиц и электромагнитного поля (без его получения путём вариации), его матричная структура. Свойства тензора энергии-импульса отдельно для электромагнитного поля. § 4.3
- 13) Распространение электромагнитных волн. § 4.5
- 14) Поле движущегося точечного заряда. § 4.6 без 4.6.1.2
- 15) Электростатика. Мультипольные моменты. § 5.1
- 16) Магнитостатика. Магнитный момент. § 5.2
- 17) Дипольное (с выводом), магнито-дипольное и квадрупольное излучение (знать ответы). Критерии применимости. Ландау и Лифшиц (там же, §§66,67,71,72)
- 18) Торможение излучением нерелятивистской частицы, критерии применимости выражения для лоренцевской силы трения. § 5.5, Ландау и Лифшиц (там же, §75)
- 19) Мощность производства энергии излученных волн релятивистским зарядом, двигающимся с ускорением, § 5.5.1. Синхротронное излучение. Направленность (анализ формулы потенциалов Лиенара-Вихерта (4.60)) и характерная частота (оценка). Топтыгин (2002, Несколько страниц до уравнения (5.78)).

Также надо владеть математическим аппаратом, изложенным в §§6.1, 6.2, 6.3.

Список задач, предлагаемых на экзамене по Теории поля для ФФКЭ

• **Задача 1:** Если коллайдер на встречных пучках работает в штатном режиме, то при столкновении двух протонов интересующая нас реакция X происходит с превышением её порога в α раз. Однако из-за неполадок один из двух пучков в коллайдере имеет энергию, составляющую часть ϵ от номинальной. При каком значении ϵ порог реакции X достигнут не будет? Пучки считать релятивистскими, так что $\gamma \gg \alpha^2$. • **Решение:** См. (7.27).

• **Задача 2:** В лабораторной системе отсчёта K дана бегущая линейно поляризованная волна $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$, $\mathbf{k} = \{0, 0, k\}$, $\mathbf{E}_0 \parallel Ox$. Система отсчёта K' движется со скоростью $\mathbf{V} = \{0, V, 0\}$. Найдите магнитное поле волны в системе K' . • **Решение:** См. (7.31).

• **Задача 3:** В лабораторной системе отсчёта K дана бегущая линейно поляризованная волна $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$, $\mathbf{k} = \{0, 0, k\}$, $\mathbf{E}_0 \parallel Ox$. Постройте тензор энергии-импульса для такой волны. Система отсчёта K' движется со скоростью $\mathbf{V} = \{0, 0, V\}$. Запишите преобразование, связанное с переходом между системами отсчёта $K \rightarrow K'$, для поля волны и для тензора энергии-импульса, и покажите, что они дают соответствующие друг другу результаты. • **Решение:** См. (7.32).

• **Задача 4:** Магнитный $\boldsymbol{\mu}$ и электрический диполь \mathbf{d} прикреплены к точечному объекту и колеблются с частотой ω , $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 \cos(\omega t)$, $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \cos(\omega t)$, а их направления ортогональны, $\boldsymbol{\mu}_0 \perp \mathbf{d}_0$. Чему равна сила (её среднее по времени значение), необходимая для удержания в покое этого объекта, если полная мощность излучения равна 1 ГВт (мощность генерации одного атомного реактора)? • **Решение:** См. (7.33).

• **Задача 5:** Две ультра-релятивистские частицы с противоположными электрическими зарядами пролетают мимо друг друга на прицельном расстоянии $\rho \gg r_0$ (r_0 – классический радиус электрона), так что их траектории движения мало отличаются от прямых. Оценить время (в лабораторной системе координат и в системе координат одной из частиц), на котором одна частица на другую действует посредством кулоновской силы существенно (то есть порядка пиковой силы). Оцените полную излучённую частицами энергию. • **Решение:** См. (7.35).

• **Задача 6:** Однородно заряженный шарик ради-

уса a пролетает параллельно обкладкам конденсатора, через его центр. На влёте в конденсатор шарик вращается вокруг оси, нормальной к обкладкам конденсатора, с угловой скоростью ω (так что $a\omega \ll c$). Радиус круглых обкладок конденсатора равен R , скорость шарика v сравнима со скоростью света, его масса m . Найдите изменение ориентации оси вращения шарика после пролёта через конденсатор. • **Решение:** См. (8.12).

• **Задача 7:** Отрицательный заряд $-Q$ распределён равномерно по длинному цилиндру длиной L и диаметром $2a$, $L \gg a$, а компенсирующий его положительный заряд находится в центре цилиндра. Найти электростатический потенциал этой системы зарядов на расстояниях $r \gg L$ от неё. • **Решение:** См. (7.28).

• **Задача 8:** Нерелятивистский электрон пролетает между обкладок конденсатора, параллельно его обкладкам и через его центр. Заряд на обкладках конденсатора настолько мал, что траектория электрона является почти прямой линией. Радиус круглых обкладок конденсатора R , скорость электрона v . Найдите излучённую электроном энергию.

• **Задача 9:** Заряд движется в скрещенных магнитном и электрическом полях $H > E$. Может ли заряд в таких полях двигаться равномерно и прямолинейно? Что называют инвариантами электромагнитного поля?

• **Задача 10:** Покажите, что равенство нулю 4-дивергенции тензора энергии-импульса для свободных частиц эквивалентно уравнению движения этих частиц. • **Решение:** См. начало § 3.3.

• **Задача 11:** Диполь $\mathbf{d} \parallel Oz$ колеблется с частотой ω , так что $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \cos(\omega t)$. На расстоянии $L \gg \lambda$ в направлении оси Oz (где λ – соответствующая длина волны излучения) находится другой диполь \mathbf{p} , колебания которого описываются уравнением $\partial_t^2 \mathbf{p} + \omega^2 \mathbf{p} = (e^2/m)\mathbf{E}$, где e и m – эффективные заряд и масса диполя, а \mathbf{E} – полное поле в точке положения диполя. Найдите амплитуду и фазу колебаний второго диполя. Указание: разделите внешнее поле \mathbf{E} в уравнении движения второго диполя на поле первого диполя и поле самого второго диполя; действие последнего даёт силу радиационного трения. • **Решение:** См. (7.34).

Часть I

КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Глава 1

ЛАГРАНЖЕВ И ГАМИЛЬТОНОВ
ФОРМАЛИЗМЫ

§1.1. Формализм Лагранжа: одна степень свободы

Пусть $L(q, \dot{q})$ – лагранжиан системы, где $q(t)$ – траектория движения системы. Сейчас мы предполагаем, что величина q является скаляром, так что под системой может понимать, например, одномерная координата материальной точки.

Уравнения движения определяются экстремумом функционала

$$S = \int dt L(q, \dot{q}), \quad (1.1)$$

который называется действием. Для общеупотребительных теорий этот экстремум оказывается минимумом. Траектория $q(t)$, на которой достигается экстремум действия, называется истинной траекторией. По таким траекториям в действительности может эволюционировать классическая система.

Найдём истинную траектория частицы. На истинной траектории $q(t)$ действие достигает экстремума, поэтому при фиксированных граничных условиях любая малая вариация δq истинной траектории δq должна привести к нулевой вариации действия (линеаризованной по вариации траектории), $\delta S = 0$. Граничными условиями примем следующие условия: частица начинает двигаться в момент времени t_a в точке q_a , а заканчивает движение в момент времени t_b в точке q_b ; при вычислении вариации действия будем сначала предполагать, что вариации подвергнуты и граничные значения $q_{a,b}$ (тогда как $t_{a,b}$ фиксированы). В таком случае

$$\begin{aligned} \delta S &= S(\{q + \delta q\}) - S(\{q\}) = \\ &= \int_{t_a}^{t_b} dt \left(\frac{\delta L}{\delta q} - \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{q}} \right) \delta q + \left. \frac{\delta L}{\delta \dot{q}} \delta q \right|_a^b \end{aligned} \quad (1.2)$$

При фиксированном начальном и конечном положениях, когда $\delta q(t_a) = \delta q(t_b) = 0$, вариация действия оказывается равной нулю, т.е. траектория $q(t)$ является истинной, если на ней выполняется уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{q}} = \frac{\delta L}{\delta q}. \quad (1.3)$$

Это уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением по времени на координату q . Поскольку лагранжиан зависит от первой производной \dot{q} , то уравнение Лагранжа в общем случае является уравнением второго порядка. Поэтому для его решения необходимо два граничных условия, в нашем случае этими граничными условиями являются значения координаты q в начале и в конце движения.

Рассмотрим наиболее простой пример лагранжиана – лагранжиан нерелятивистской частицы массы m , движущейся в потенциале $\Pi(q)$:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m\dot{q}^2}{2} - \Pi(q).$$

В этом случае уравнение Лагранжа принимает вид уравнения Ньютона для частицы, движущейся под действием внешней силы $f(q)$:

$$m\ddot{q} = f, \quad f(q) = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}.$$

Продолжение: книга Фейнман и Хибс, 1968, Гл.2, §1

§1.2. Формализм Гамильтона: одна степень свободы

Лагранжиан формально зависит от двух величин – координаты q и скорости \dot{q} , но реально при вариации действия S независимую вариацию имеет только траектория, $\delta q(t)$, тогда как вариация скорости может быть найдена из этой вариации простым дифференцированием по времени, $d(\delta q)/dt$. Этот же факт находит отражение в том, что уравнение Лагранжа оказывается уравнением второго порядка.

Как известно, дифференциальное уравнение второго порядка эквивалентно системе из двух дифференциальных уравнений первого порядка, при этом требуется ввести, помимо координаты q , ещё одну независимую функцию времени, которая должна иметь нетривиальную зависимость от скорости \dot{q} . Формализм Гамильтона, в частности, выполняет именно эту функцию. Кроме того, в нём уравнения движения переписываются в симметричной форме, что позволяет сделать ряд важных заключений.

Введём импульс

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad (1.4)$$

и будем считать, что есть две возможности задать Лагранжиан: через пару переменных $\{q, \dot{q}\}$ и через пару переменных $\{q, p\}$; если известна одна пара переменных, то вторая пара может быть получена используя равенства (1.4). Введём функцию Гамильтона (гамильтониан)

$$\mathcal{H}(q, p) = p\dot{q} - L \quad (1.5)$$

Уравнение движение второго порядка в формализме Лагранжа переписывается в виде системы двух уравнений первого порядка в формализме Гамильтона:

$$\dot{q} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p}, \quad \dot{p} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q}. \quad (1.6)$$

Чтобы получить эти уравнения, можно заметить, что с формальной точки зрения гамильтониан зависит от пары переменных $\{q', p\}$. При этом в этой паре переменных мы обозначили $q' = \dot{q}$, чтобы отличать вариации этих переменных от вариаций переменных $\{q, \dot{q}\}$. Их приращения связаны между собой линейным преобразованием

$$\begin{pmatrix} \delta q' \\ \delta p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta q \\ \delta \dot{q} \end{pmatrix}$$

Используя эту линейную связь, выражая гамильтониан через лагранжиан согласно (1.5) и полагая, что импульс $p = p(q, \dot{q})$, можно непосредственно убедиться, что уравнения Гамильтона (1.6) эквивалентны уравнению Лагранжа (1.3).

Уравнения можно переписать в более компактной форме:

$$\partial_t Q = \hat{\epsilon} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta Q}, \quad \hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}.$$

1.2.1 Скобки Пуассона

Скобки Пуассона двух некоторых функций F и G от канонических переменных вычисляются согласно равенству

$$[F, G] = \frac{\delta F}{\delta q} \frac{\delta G}{\delta p} - \frac{\delta G}{\delta q} \frac{\delta F}{\delta p}.$$

Из этого определения вытекает, что элементарная скобка Пуассона $[q, p] = 1$. В терминах скобки Пуассона уравнения движения переписываются в виде

$$\dot{Q}_i = [Q_i, \mathcal{H}].$$

где $i = \{q, p\}$. Отсюда следует, что скорость изменения любой величины $F(q, p)$ определяется её скобкой Пуассона с Гамильтонианом

$$\dot{F} = [F, \mathcal{H}]. \quad (1.7)$$

1.2.2 Каноническое преобразование

1.2.3 Переменные уничтожения и рождения a и a^*

Построим переменные

$$A = \begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix},$$

соответствующие операторам рождения-уничтожения в квантовой теории:

$$A = \hat{U}_a Q, \quad \frac{\delta}{\delta A} = \hat{U}_a^{-1, T} \frac{\delta}{\delta Q},$$

$$\hat{U}_a = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/c & ic \\ 1/c & -ic \end{pmatrix}, \quad \det \hat{U}_a = -i.$$

Здесь безразмерная постоянная c не определена. Она может быть зафиксирована исходя из дополнительных (физических) соображений. В дальнейшем мы полагаем её равной единице. Скобка Пуассона

$$[a, a^*] = \frac{1}{\det \hat{U}_a} = i,$$

так что формально преобразование \hat{U}_a не является каноническим; В терминах новых переменных скобка Пуассона приобретает дополнительный множитель $\det \hat{U}_a$:

$$[F, G] = i \left(\frac{\delta F}{\delta a^*} \frac{\delta G}{\delta a} - \frac{\delta G}{\delta a^*} \frac{\delta F}{\delta a} \right).$$

В переменных a и a^* уравнения Гамильтона (1.6) переписываются в виде

$$\dot{A} = -i\epsilon \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta A}. \quad (1.8)$$

Формулы (1.6)-(1.8) могут быть без труда обобщены на случай системы с N степенями свободы.

1.2.4 Действие в формализме Гамильтона

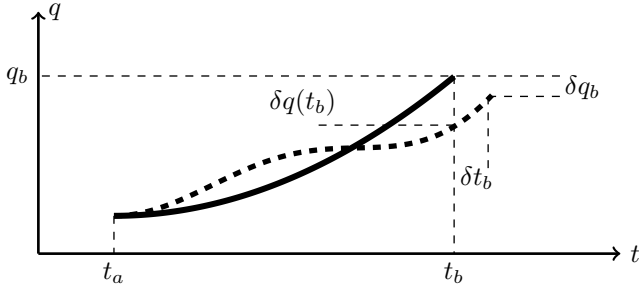


Рис. 1.1 Вариация действия с нефиксированным концом. Сплошная линия – неварьированный путь; штрихованная – варьированный. Для простоты построения изображения мы положили, что конец пути ‘а’ фиксирован, тогда как противоположный конец ‘а’ претерпевает ненулевую вариацию.

В формализме Гамильтона действие системы по-прежнему есть интеграл по времени от лагранжиана,

$$S = \int dt L, \quad (1.9)$$

но теперь лагранжиан зависит от четырёх переменных:

$$L = L(q, \dot{q}, p, \dot{p}) = p\dot{q} - \mathcal{H}(q, p), \quad (1.10)$$

$$\text{или } L = L(a, \dot{a}, a^*, \dot{a}^*) = ia^* \dot{a} - \mathcal{H}(a, a^*),$$

с точностью до полного дифференциала по времени. Варьирование действия по $\{q, p\}$ даёт уравнения Гамильтона (1.6), варьирование по переменным $\{a, a^*\}$ – уравнения (1.8).

Важно подчеркнуть, что временные производные от p, q входят в действие не более чем в первой степени. Поэтому уравнения движения Гамильтона (1.6) оказываются уравнениями первой степени по времени, тогда как уравнение движения Лагранжа (1.3) в общем случае является уравнением второго порядка по времени.

Интерес представляет вариация действия (1.9) по положению начальной/конечной точек интегрирования. Воспользуемся (1.10), для того, чтобы переписать действие в виде

$$S = \int_{t_a}^{t_b} dt L = \int (p dq - \mathcal{H} dt) \quad (1.11)$$

Предположим теперь, что при вариации $t_b \rightarrow t_b + \delta t_b$, $q_b \rightarrow \delta q_b$. Тогда вариация действия по изменению положения конца пути равна

$$\frac{\delta S}{\delta t_b} = -\mathcal{H}(t_b), \quad \frac{\delta S}{\delta q_b} = p(t_b). \quad (1.12)$$

Методически интересно получить это же утверждение из рассмотрения вариации действия в лагранжевой форме (1.2). Этот путь более громоздкий, поскольку тот факт, что уравнения Лагранжа являются уравнениями второй степени, нарушает независимость вариаций времени и координаты. Варьированное действие имеет вид

$$S_{\text{var}} = \int_{t_a + \delta t_a}^{t_b + \delta t_b} dt L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}).$$

В результате получаем, что вариация действия равна

$$\delta S = \int_{t_a}^{t_b} dt \left(\frac{\delta L}{\delta q} - \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{q}} \right) \delta q + (p\delta q - \mathcal{H}\delta t) \Big|_a^b, \quad (1.13)$$

сравни с (1.2). В процессе выкладок мы воспользовались (1.4,1.5), а также следующим соотношением для вариации обобщённой координаты q

$$\delta q(t_{a,b}) = \delta q_{a,b} - \dot{q}(t_{a,b})\delta t_{a,b},$$

которое можно понять, воспользовавшись Рис. 1.1. Второе слагаемое в (1.13) соответствует (1.12).

1.2.5 Уравнение Гамильтона-Якоби

Вернёмся к уравнению (1.12). Гамильтониан в первом уравнении зависит от координаты и импульса, импульс же является частной производной действия по координате. Поэтому, полагая траекторию истинной и действие зависящим от времени, координаты начальной точки q_a и конечной точки q_b траектории, получаем

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H}(q, \partial S / \partial q; t) = 0 \quad (1.14)$$

Это уравнение называется *уравнением Гамильтона-Якоби (Hamilton-Jacobi equation)*. Наша конечная цель – найти траекторию частицы, например в виде зависимости $q(t)$.

Как от параметра, функция S зависит от координаты начальной точки траектории q_a , и от начального времени t_a .

$$S = S_b(t, q; q_a) + S_a(t_a, q_a). \quad (1.15)$$

Можно сказать, что разбиение справа есть сумма действий на промежутках времени (t_0, t) и (t_a, t_0) , где t_0 – произвольное фиксированное время. Поэтому

$$\frac{\partial S}{\partial q_a} = -p_a, \quad \frac{\partial S}{\partial t_a} = E_a. \quad (1.16)$$

где p_{ai} – начальный импульс частицы, а E_a – начальная энергия в точке ‘а’; в силу уравнений движения $E_a = \mathcal{H}(t_a, q_a, p_a)$.

1.2.5.1 Несколько степеней свободы

Продолжим рассуждения, посчитав, что мы сделали прямолинейное обобщение выше изложенных рассуждений на систему с s степенями свободы. Как начальные координаты q_{ai} , так и начальные импульсы p_{ai} естественным образом не зависят от времени t – параметра вдоль траектории движения. Поэтому $2s$ величин q_{ai}, p_{ai} являются в этом смысле интегралами движения. Ещё одним интегралом движения является начальное t_a , тогда как начальная энергия E_a определяется уже названными интегралами движения.

В силу специфики конкретной задачи, от координат q_{ai} оказывается часто удобным перейти к другому набору $\alpha_i = \alpha_i(\{q_{ai}\})$ независимых интегралов движения. Время не следует включать в аргументы α_i в силу существования разбиения (1.15), но с точки зрения уравнения Гамильтона-Якоби, сам кусок действия S_a можно считать постоянной интегрирования, зависящей как от параметров от величин α_i . Отвлекаясь теперь от смысла совокупности $\{\alpha_i, S_a\}$ как от начальных координат и времени, отметим, что с точки зрения уравнения

Гамильтона-Якоби, функция S зависит от $s+1$ параметров и представима в виде разбиения (1.15), поскольку она входит в это уравнение только посредством своих частных производных.

Таким образом, алгоритм нахождения траектории системы с помощью уравнения Гамильтона-Якоби следующий. Сначала надо найти саму функцию S в виде (1.15):

$$S = f(t, q_i; \alpha_i) + A(\alpha_i). \quad (1.17)$$

Затем составить s уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad (1.18)$$

где α_i и β_i – интегралы движения, определяемые начальными условиями. Эти s уравнений позволяют вычислить зависимости s координат q как функций от времени и $2s$ интегралов движения. При желании, вместо функции f в (1.18) можно дифференцировать всю функцию S , тогда в вычислениях будет непосредственно вовлечено начальное время t_a .

§1.3. Законы сохранения

Рассмотрим любую инфинитезимально малую вариацию истинной траектории $a(t)$ системы с одной степенью свободы:

$$a' = a + \delta a, \quad (1.19)$$

С учётом уравнений движения (1.3) получаем, что при инфинитезимально малом преобразовании на траектории истинного движения изменение лагранжиана равно

$$\delta S = \int dt(L' - L), \quad L' - L = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right), \quad (1.20)$$

или в формализме Гамильтона

$$L' = L + \frac{d}{dt}(i a^* \delta a). \quad (1.20a)$$

1.3.1 Теорема Нётер

Теорема Нётер (*Noether's theorem*) утверждает, что если система обладает некоторой симметрией, выражающейся в инвариантности уравнений движения относительно некоторой группы преобразований, то система обладает сохраняющейся величиной.

При дальнейшем рассмотрении этого Пункта 1.3.1 мы предполагаем простейший вариант: у системы одна степень свободы, и её лагранжиан не зависит явно от времени. В этом случае симметрия состоит в инвариантности уравнений движения относительно сдвига по времени, а сохраняющейся величиной является энергия.

Первый способ доказательства теоремы Нётер основан на рассмотрении малой произвольной вариации обобщённой координаты q и изложен в Пункте 1.3.1.2. Этот способ соответствует замене переменных поля в интеграле по траекториям. Пример применения замены переменных поля в интеграле по траекториям можно найти, например, в Вергелес, 2008, Приложение В: Тензор энергии импульса.

Второй вариант доказательства вытекает из рассмотрения произвольной деформации временной оси, см. Пункт 1.3.1.1. Логика этого метода, применённая в полевой задаче к деформации пространственных координат, соответствует методу виртуальных перемещений. В задачах о непрерывных средах метод виртуальных перемещений обычно применяют для нахождения тензора напряжений.

Наконец, есть вывод, в котором рассматриваются совместные деформация координаты временной оси и вариация обобщённой координаты, которые будучи взяты в совокупности, непосредственно соответствуют симметрии лагранжиана. Этот вывод дан, в частности, в учебнике Пескин и Шредер (2001, §2.2, Теорема Нётер) и изложен в Пункте 1.3.1.3, но, по нашему мнению, является менее продуктивным.

1.3.1.1 Вывод интеграла движения через произвольную деформацию временной оси

Отталкиваясь от того факта, что уравнения движения инвариантны относительно сдвига времени, рассмотрим

произвольную деформацию временной оси

$$t' = t + u(t),$$

предполагая $u(t)$ малой величиной; будем также считать, что на границе временного промежутка интегрирования $u(t)$ обращается в ноль. В этом случае получаем следующие законы преобразования величин, их первых производных и меры интегрирования по времени:

$$\begin{aligned} \partial_t &\rightarrow (1 + \partial_t u) \partial_{t'}, & dt &= (1 - \partial_t u) dt', \\ a(t) &\rightarrow a(t') - u \partial_{t'} a(t'), \\ \partial_t a(t) &\rightarrow \partial_{t'} a(t') - u \partial_{t'}^2 a(t') \end{aligned} \quad (1.21)$$

в первом порядке по малому u (в выражении для $\partial_t a$ слагаемые, содержащие $\partial_t u$, взаимно сократились); подразумевается, что $a(t)$ и $a(t')$ – одна и та же функция, взятая, однако, от разных аргументов.

Вариация действия (1.9) при деформации временной оси (т.е. при замене переменной интегрирования) должна быть тождественно равна нулю,

$$\begin{aligned} \delta S &= - \int \left(L \dot{u} + \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} u + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} u \right) dt = \\ &= \int \left(\frac{dL}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} \right) u dt = 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Отметим, что на этом шаге мы использовали отсутствие явной зависимости лагранжиана от времени, и поэтому именно здесь закладывается результат – сохранение энергии при движении. При втором варианте записи в (1.22) круглая скобка равна нулю в силу произвольности деформации u . Равенство нулю может быть интерпретировано следующим образом: первое слагаемое в скобке есть полная производная лагранжиана, которая может быть расписана через частные производные координаты и скорости (остальные слагаемые).

Теперь воспользуемся тем, что траектория $q(t)$ истинная, т.е. выполнено уравнение движения (1.3). Тогда после интегрирования по частям третьего слагаемого в круглой скобке (первый вариант равенства) правой части (1.22) получим, что

$$0 = \delta S = \int dt \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L \right) \dot{u} = \int dt u \partial_t H. \quad (1.23)$$

Ввиду произвольности вариации u , приходим в тому, что производная от гамильтониана должна обращаться в ноль,

$$\partial_t H = 0,$$

т.е. полная энергия системы сохраняется.

1.3.1.2 Вывод интеграла движения через произвольную деформацию обобщённой координаты

Рассмотрим другой способ, основанный на вариации обобщённой координаты на истинной траектории. Пусть

вариация координаты равна

$$q \rightarrow q + u\dot{q}, \quad \dot{q} \rightarrow \dot{q} + \partial_t(u\dot{q}). \quad (1.24)$$

Заметим, что вариация q соответствует (1.21), тогда как вариация \dot{q} уже другая: она получается непосредственным дифференцированием по времени вариации q . Величина u предполагается малой и обращающейся в ноль на границе временного промежутка интегрирования, а в остальном произвольная. Вариации действия и лагранжиана на истинной траектории суть

$$\begin{aligned} \delta S &= \int dt \delta L = 0, & \delta L &= \frac{\partial L}{\partial q} u\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \partial_t(u\dot{q}) = \\ &= u \left(\frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} \right) + p\dot{q} \partial_t u = u \frac{dL}{dt} + p\dot{q} \partial_t u. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Мы воспользовались тем, что лагранжиан не зависит явно от времени, поэтому

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q}$$

и проведём интегрирование по частям во втором представлении вариации лагранжиана в (1.25). В результате мы получим, что вариация действия (1.9) равна тому же выражению (1.23), взятым с противоположным знаком.

Пусть теперь лагранжиан не зависит явно от обобщённой координаты q . В этом случае сохраняющейся величиной является также и канонический импульс. Покажем это. Вариацию координаты теперь возьмём в виде, соответствующему сдвигу по координате, а не по времени, как это было в (1.24). В результате вариация координаты и действия равны

$$\delta q = \partial_t u(t), \quad \delta S = \int p du = - \int \partial_t p u dt, \quad (1.26)$$

т.е. импульс сохраняется,

$$\partial_t p = 0.$$

1.3.1.3 Однопараметрическое семейство решений

Предположим, что для любой истинной траектории движения системы $q(t)$ (и $p(t)$, если запись ведётся в формализме Гамильтона) существует семейство других истинных траекторий, задаваемых параметром α :

$$q'(t) = q'(q, \alpha), \quad p'(t) = p'(q, \alpha), \quad (1.27)$$

$$\text{или } a'(t) = a'(a, \alpha)$$

в терминах переменной $a(t)$. Для определённости мы полагаем, что если параметр $\alpha = 0$, то преобразование является тождественным, т.е. преобразованный путь совпадает с исходным.

Все траектории (1.27) являются решением (1.6). Поэтому при преобразовании (1.27), в частности, при преобразовании (1.19), лагранжиан L в (1.9) изменяется на полный дифференциал по времени,

$$\delta S = \int dt(L' - L), \quad L' - L = \frac{dJ(\alpha)}{dt}, \quad (1.28)$$

поскольку вариация преобразованного действия должна приводить к траектории (1.27).

Теперь покажем, что существование семейства решений (1.27) означает, что при движении системы сохраняется некоторая величина I . Действительно, поскольку выражения (1.28) и (1.20) были получены непосредственно (без применения операции интегрирования по частям), то поправка к лагранжиану (1.28) при $\alpha \rightarrow 0$ равна аналогичной поправке (1.20). В результате получаем

$$\frac{dI}{dt} = 0, \quad I = \partial_\alpha (ia^* \delta a - J) \Big|_{\alpha=0}, \quad (1.29)$$

где вариация пути δa соответствует параметрическому семейству (1.27),

$$\delta a = \alpha \partial_\alpha a'(t, \alpha) \Big|_{\alpha=0}.$$

Таким образом, для того, чтобы иметь возможность найти интеграл движения I , необходимо уметь вычислять величину J в (1.28), а точнее – величину $\partial_\alpha J \Big|_{\alpha=0}$ в (1.29).

Рассмотрим тот же элементарный пример закона сохранения энергии для системы с одной степенью свободы. Если лагранжиан системы (вместе с ним и гамильтониан) не зависит явно от времени, то из существования решения $a(t)$ следует существование решения

$$a'(t) = a(t + \alpha).$$

В этом случае величина J , введённая в (1.28) и необходимая нам в виде (1.29), равна

$$\delta a = \alpha \dot{a}, \quad \partial_\alpha J \Big|_{\alpha=0} = L.$$

Используя (1.9) получаем, что сохраняющаяся величина I в (1.29) есть гамильтониан, $I = H$.

1.3.2 Поле

Рассмотрим полевую формулировку. К каждой точке пространства прикреплено некоторое фиксированное число степеней свободы, которые и являются в этом случае каноническими переменными в лагранжевом описании. Координаты же в этом случае служат для перечисления канонических переменных.

Мы предполагаем, что нулевой координатой (первой по счёту) является временная координата, а пространство-время является d -мерным пространством.

В случае полевой задачи действие

$$S = \int d^d x \mathcal{L}. \quad (1.30)$$

где \mathcal{L} – d -мерная плотность лагранжиана. В случае лагранжева формализма $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_a, \phi_{a,\mu})$, где индекс $a = 1, \dots, N$ нумерует компоненты поля или разные поля. В случае гамильтонова формализма плотность лагранжиана $\mathcal{L}(a_a, a_{a,\mu}, a_a^*, a_{a,\mu}^*)$.

Уравнения движения .

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} = 0. \quad (1.31)$$

Величина, которую принято называть тензором энергии-импульса,

$$T_\mu^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{a,\nu}} \phi_{a,\mu} - \delta_\mu^\nu \mathcal{L}, \quad (1.32)$$

удовлетворяет уравнениям

$$\partial_\nu T_\mu^\nu = 0, \quad (1.33)$$

если выполнены уравнения движения (1.31). Уравнения (1.33) означают, что величины

$$P_\mu = \int dx^1 \dots dx^{d-1} T_\mu^0 \quad (1.34)$$

сохраняются во времени.

Определение (1.32) можно переписать через любые другие независимые комбинации полей. Пусть Φ_a , $a = 1, \dots, N$ – любые N независимых функций N величин ϕ_a . Тогда верно равенство

$$T_\mu^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{a,\nu}} \Phi_{a,\mu} - \delta_\mu^\nu \mathcal{L}, \quad (1.35)$$

Переход от производных по $\phi_{a,\nu}$ к производным по $\Phi_{a,\nu}$ возможен. Действительно, используя соотношение

$$\Phi_{a,\nu} = \frac{\partial \Phi_a}{\partial \phi} \delta_\nu^\lambda \phi_{c,\lambda} \Rightarrow \frac{\partial \phi_{c,\lambda}}{\partial \Phi_{a,\nu}} = \delta_\lambda^\nu \frac{\partial \phi_c}{\partial \Phi_a}$$

первое слагаемое в (1.35) преобразуем как

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{c,\lambda}} \delta_\lambda^\mu \frac{\partial \phi_c}{\partial \Phi_a} \cdot \frac{\partial \Phi_a}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{c,\mu}} \phi_{c,\mu}$$

т.е. равенство (1.32) и (1.35) доказано.

1.3.2.1 Теорема Нётер

Часть II

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Глава 2

ЧЕТЫРЁХ-МЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ

Литература Джексон (1965), Ландау и Лифшиц (1988), Топтыгин (2005), Топтыгин (2002), Мешков и Чириков (1987), Угаров (1977),

§2.1. Постулаты релятивистской механики

2.1.1 Недостаточность галилеевской механики и необходимость новой теории.

Независимость вида математической записи законов физики относительно выбора инерциальной системы отсчёта должна предполагаться в любой физической теории. Если же все системы отсчёта одинаковы, то нет выделенной, а значит вопрос об абсолютной скорости тела бессмысленен. А. Пуанкаре в начале XX века сформулировал это интуитивное соображение так: в природе есть закон, заключающийся в том, что абсолютную скорость обнаружить невозможно никаким способом. Поэтому актуальным является только вопрос о том, как изменяется математическое описание физических систем, когда мы изменяем систему отсчёта. Ответ на этот вопрос накладывает ограничения на возможный вид уравнений движения материи.

Первый закон Ньютона утверждает, что свободное тело, пущенное с любой скоростью в любом направлении, должно двигаться равномерно и прямолинейно в любой инерциальной системе координат. Следовательно, декартовы координаты любых двух инерциальных систем координат связаны между собой линейным преобразованием. Тем не менее, нужна дополнительная информация для того, чтобы определить конкретный вид этого линейного преобразования. Как оказывается, для разных физических моделей ответ оказывается различным.

В классической механике максимальная относительная скорость движения двух тел может быть сколь угодно большой. Поэтому в ней рассматривалось всего два типа взаимодействия. Первое — гравитационное взаимодействие двух материальных точек, сформулированное И. Ньютоном. Считалось, что это взаимодействие распространяется с бесконечной скоростью, т.е. определяется текущим положением тел. Второе — это близкое действие двух абсолютно недеформируемых (абсолютно твёрдых) тел конечного размера, когда они приходят в

соприкосновение. По определению, при воздействии на абсолютно твёрдое тело конечного размера в одной его точке, все другие его точки в этот же момент начинают испытывать ускорение, определяемое ускорением центра масс и угловым ускорением тела. Таким образом, здесь также встроено представление о бесконечной скорости распространения взаимодействия.

Математическое описание этих двух взаимодействий по форме остаётся тем же самым при переходе из одной инерциальной системы координат в другую, если предположить, что координаты этих систем связаны между собой преобразованием Галилея. Пусть \mathbf{v} — скорость системы K' относительно системы K . Преобразованием Галилея является

$$t' = t, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t, \quad (2.1)$$

где t, \mathbf{r} и t', \mathbf{r}' — координаты одной и той же материальной точки в инерциальных системах K и K' соответственно. Если законы физики инвариантны относительно преобразований вида (2.1) то говорят о галилеевской инвариантности. О механике в этом случае говорят как о *классической* или *галилеевской механике*.

Во второй половине XIX века Д.К. Максвелл сформулировал уравнения электродинамики. Эти уравнения, записанные в пустоте, могут быть переписаны в виде волнового уравнения, которое описывает распространение света. Проблема заключалась в том, что уравнения Максвелла не обладают галилеевской инвариантностью. Наоборот, согласно уравнениям Максвелла электромагнитная (световая) волна в любой инерциальной системе координат распространяется с одной и той же скоростью, равной константе c . Численное значение этой константы равно

$$c = 299\,792\,458 \text{ м/с.}$$

Из этого факта следует общее ограничение: любое массивное тело может двигаться только со скоростью, меньшей скорости света. Действительно, в противном слу-

чае в системе отсчёта этого тела световая волна должна быть неподвижна, если тело движется со скоростью света по направлению распространения волны. Итак, *скорость c – максимальная скорость распространения взаимодействия, а любое массивное тело может двигаться только со скоростью, меньшей c .*

Для восстановления инвариантности уравнений физики при переходе из одной инерциальной системы координат в другую следовало отказаться от преобразования Галилея в пользу другого линейного преобразования координат. Такое преобразование предложил Х.А. Лоренц (поэтому оно носит его имя), но окончательно обдумал этот факт и сформулировал готовую теорию специальной теории относительности (СТО) А. Эйнштейн в 1905 году. В этой теории два события, одновременные в одной системе координат, но разнесённые по пространству, в общем случае не являются одновременными в другой системе координат. Понятие времени стало относительным. Поэтому новую теорию стали называть *теорией относительности (theory of relativity)*, построенную на её основе механику стали называть *релятивистской механикой*.

Тем не менее, при замене преобразования Галилея преобразованием Лоренца возникала новая проблема: теперь мгновенно распространяющееся гравитационное взаимодействие не могло быть органично включено в общефизическую картину. Процесс создания общей теории относительности (ОТО), включающей в себя и гравитацию (гравитационное взаимодействие теперь также распространялось с конечной скоростью), был завершён в 1916 году, где лидером также оказался А. Эйнштейн.

2.1.2 Постулаты специальной теории относительности

Упомянем сначала базовые постулаты, которые лежат в основе всех физических теорий.

Все физические явления описываются математическими законами. Не существует явлений материального мира, которые не могли бы быть описаны математической моделью.

Принцип причинности. Этот принцип утверждает, что какое-либо событие, произошедшее в любой время в любой точке, может повлиять только на то, что будет после этого события. В такой форме этот принцип ещё не формализован, при построении конкретной теории его надо доопределять.

Теперь перейдём к конкретной теории. Сейчас мы ограничиваемся специальной теорией относительности (СТО), в которой не рассматривается гравитация. Для расширения теории до общей теории относительности, включающей гравитацию, необходимо добавить новые постулаты и модифицировать часть постулатов СТО.

2.1.2.1 Базовые понятия в релятивистской механике

Свободное тело Будем говорить, что тело предоставлено самому себе, или называть его свободным телом, если оно находится на значительном расстоянии от других тел, так что его взаимодействием с этими другими телами можно пренебречь.

Инерциальная система отсчёта Инерциальной системой отсчёта называется система отсчёта, в которой тело, предоставленное самому себе, движется равномерно и прямолинейно.

Четырёх-мерное пространство-время Мы будем изучать движение тел и распространение волн в 4-мерном пространстве времени. Четыре измерения складываются из одного, соответствующего времени, и трёх, соответствующих обычному наблюдаемому пространству.

Событие Событием мы будем называть точку в четырёх-мерном пространстве-времени.

Событие фиксирует место и время.

2.1.2.2 Постулаты, касающиеся свойств пространства

Эти постулаты переходят в релятивистскую механику из классической механики.

- Пространство и время однородны: физические процессы в замкнутой системе не зависят от её местоположения в пространстве и во времени.
- Пространство изотропно: физические процессы в замкнутой системе не зависят от её ориентации в пространстве.

2.1.2.3 Постулаты, касающиеся инерциальных систем отсчёта

- Равноправие инерциальных систем отсчёта.

Во всех инерциальных системах отсчёта физические законы выглядят одинаково, т.е. одинакова их математическая запись.

- Ограниченность максимальной скорости.

Существует максимальная скорость движения или передачи сигнала в пространстве. Из предыдущего постулата следует, что она одна и та же во всех инерциальных системах отсчёта. Эту максимальную скорость мы будем обозначать буквой

скорость света: c .

С максимальной скоростью c распространяется, в частности, свет в вакууме.

Второй постулат является новым с точки зрения классической механики.

2.1.3 Принцип минимума действия

Ньютонова механика формулировалась, исходя из постулирования уравнений движения. В дальнейшем было показано, что уравнения движения могут быть получены из принципа минимума действия.

Построение обновлённой теории предпочтительней начинать непосредственно с определения действия, и затем находить уравнения движения путём его минимизации. Соображения для такого выбора следующие. По смыслу, действие есть величина, не зависящая от выбора системы координат, или, как говорят, являющаяся релятивистским инвариантом. А именно, фиксированной траектории частицы, записанной в любой системе координат, действие ставит в соответствие одно и то же число. Уравнения движения не обладают этим простым свойством. Хотя они и имеют одинаковый математический вид во всех системах отсчёта, но конкретные значения величин в уравнении движения разумеется зависят от выбора системы координат.

Общие принципы построения действия для описания лагранжевой системы в специальной теории относительности (СТО) следующие:

- Действие должно являться релятивистским инвариантом, т.е. его значение для конкретной траектории системы не должно зависеть от выбора системы координат;
- Действие должно иметь максимально простой вид, который, тем не менее, должен содержать в себе всю необходимую физику.
- Согласно принципам построения лагранжиана в классической механике, в лагранжиан не должны входить производные от координат по времени более чем первого порядка.

Преобразование Лоренца перемешивает между собой временную и пространственные компоненты. Поэтому производные по времени и по координате должны входить в действие симметричным образом.

2.1.3.1 Поле и материальные точки в классической теории поля

В релятивистской теории не могут рассматриваться абсолютно твёрдые тела, поскольку абсолютно твёрдое тело предполагает бесконечную скорость распространения сигнала по этому телу. Поэтому массивные частицы могут рассматриваться только как материальные точки. Для материальной частицы действие должно быть интегралом по той части пространства-времени, где существует частица. То есть, действие должно быть интегралом вдоль траектории частицы.

В специальной теории относительности получает самостоятельный смысл концепция поля. Если в ньютоновской механике взаимодействие передавалось непосредственно от одного тела к другому, а понятие поля могло рассматриваться только как вспомогательное, то в релятивистской механике поле приобретает собственное существование, вообще говоря независимое от частиц. Частица взаимодействует непосредственно только с полем в точке, где она находится. Взаимодействие с другими частицами происходит посредством распространяющегося поля: сначала одна частица создаёт изменение поля; после этого поле распространяется от этой частицы к другой со скоростью, не превышающей скорость света; затем та другая частица начинает испытывать воздействие пришедшего к ней изменённого поля. Поэтому действие для поля должно быть интегралом по всему пространству-времени от плотности лагранжиана поля.

Принцип построения действия при существовании различных частей системы состоит в том, что действие есть арифметическая сумма разных вкладов. Есть вклады, которые отвечают за движение отдельных частей – частиц и поля – самих по себе, а есть вклады, которые отвечают за взаимодействие этих частей.

2.1.3.2 Принцип ковариантности уравнений движения

2.1.4 Встроенные противоречия классической теории поля и её связь с квантовой теорией

Большинство точечных частиц помимо массы обладают также электрическим зарядом. Заряд частицы индуцирует электрическое поле, в результате чего полная энергия покоящейся частицы складывается из её энергии покоя, связанной с массой, и энергией электрического поля. Поскольку электрическое поле распределено по закону Кулона, то электрическая часть энергии оказывается формально бесконечной для точечной частицы – интеграл по пространству от объёмной плотности энергии электрического поля расходится на малых расстояниях от частицы.

Эта бесконечность проявляется в конкретных вычислениях при исследовании задачи об излучении ускоренно движущейся частицей электромагнитных волн. Можно подвести полный баланс сохранения энергии только между моментами, когда частица движется равномерно и прямолинейно. Однако пока она движется с ускорением, установить полный баланс энергии оказывается невозможным, поскольку в уравнении на баланс присутствует бесконечная добавка от энергии поля точечного заряда.

Выход из этого даёт квантовая теория, согласно которой массивные частицы описываются волновой функцией, имеющей конечный размер локализации. Если

плотность заряда остаётся конечной во всех точках пространства, то электромагнитная энергия становится

ограниченной по величине.

§2.2. Инерциальные системы координат

Основы тензорного анализа, свойства трёхмерного евклидового пространства и 4-х мерного пространства Минковского даны в Главе 6. Здесь мы предполагаем, что читатель знаком с этим математическим аппаратом.

2.2.1 Инерциальные декартовы системы координат

Пусть в инерциальной системе отсчёта K задана декартова система координат. Пространственные координаты мы обозначаем

$$x^i \equiv r^i, \quad \{i, j, k, l, \dots\} = 1, 2, 3 \text{ или } x, y, z.$$

В Пункте 2.1 говорилось о том, что переход от одной инерциальной системы координат к другой должен соответствовать линейному преобразованию координат. Если при этом линейном преобразовании время оставить неизменным, то мы получим преобразование Галилея (2.1). Для того, чтобы построить новую теорию, время надо включить время наравне с пространственными координатами в качестве одной из компонент полного 4-вектора, определяющего событие — место и время. Мы будем следовать традиции, в которой время t есть нулевая компонента

$$x^0 \equiv ct,$$

где c — скорость света. Весь 4-вектор мы будем обозначать

$$x^\mu, \quad \{\mu, \nu, \lambda, \dots\} = 0, 1, 2, 3.$$

Если нам потребуется отделить временную (нулевую) координату от пространственных (трёх последних), то мы это будем обозначать следующим образом:

$$x \equiv \|x^\mu\| = \{ct, \mathbf{r}\}.$$

В принципе, можно вводить декартову систему координат и в неинерциальной системе отсчёта. Если не будет оговорено противное, мы всегда будем подразумевать, что декартова система координат введена в инерциальной системе отсчёта, и будем отождествлять эти два понятия.

2.2.1.1 Интервал

Возьмём два события A и B с координатами

$$A : x^\mu, \quad B : x^\mu + dx^\mu \quad (2.2)$$

соответственно. По определению, интервалом между этими двумя событиями называется величина

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2 = \\ &= (dx^0)^2 - [(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2] \end{aligned}$$

Если световой луч прошёл через оба события A и B (2.2), это означает, что интервал между ними равен нулю,

$$ds^2 = 0. \quad (2.3)$$

Это равенство должно выполняться в любой системе координат, поскольку свет в пустоте распространяется всегда с фиксированной скоростью c .

2.2.1.2 Метрический тензор

Более кратко определение интервала можно записать в виде

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.4)$$

где по повторяющимся индексам происходит суммирование от 0 до 3. Метрический тензор $g_{\mu\nu}$ диагонален, его диагональные элементы суть

$$\|g_{\mu\nu}\| = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\}.$$

См. Пункт 2.2.3, где обсуждаются смысл и свойства введённого метрического тензора.

2.2.2 Переход из одной инерциальной системы координат в другую

Пусть даны две инерциальные системы координат K и K' , а координаты некоторого тела в этих системах отсчёта равны x^μ и x'^μ . Эти координаты связаны между собой линейным соотношением

$$x'^\nu = \Lambda_\mu^{\nu} x^\mu + x'^{\nu,0}. \quad (2.5)$$

в котором матрица Λ_μ^{ν} и $x'^{\nu,0}$ характеризуют относительное движение и расположение систем отсчёта K и K' . Напомним, что связь между координатами тела в разных системах отсчёта должна быть линейной, поскольку только так можно добиться прямолинейного и равномерного движения свободного тела (движущегося с произвольной допустимой скоростью в произвольном направлении) одновременно в обеих инерциальных системах отсчёта.

2.2.2.1 Матрица Лоренца и преобразование Лоренца

Из сформулированных постулатов классической теории относительности следует, что матрица перехода $\hat{\Lambda}$, описывающая в (2.5) переход из одной системы координат в другую, должна удовлетворять равенству

$$g_{\mu\nu} = g_{\sigma\zeta} \Lambda_{\nu}^{\prime\sigma} \Lambda_{\mu}^{\prime\zeta}, \quad \Rightarrow \quad \text{abs}(\det \|\Lambda_{\nu}^{\prime\sigma}\|) = 1, \quad (2.6)$$

т.е. сохранять метрический тензор. Матрица, удовлетворяющая уравнению (2.6), называется матрицей Лоренца, а преобразование координат, которое она осуществляет, называется преобразованием Лоренца.

Доказательство (2.6) основывается на постулате о независимости скорости распространения света от выбранной системы координат, см. (2.3). Таким образом, ограничение на матрицу преобразования Лоренца (2.6) является математическим выражением введённого постулата релятивистской механики. Само доказательство приведено ниже в Пункте 2.2.2.3.

2.2.2.2 Количество параметров преобразования Лоренца

Пусть матрица преобразования Лоренца $\hat{\Lambda}$ слабо отличается от тождественного преобразования,

$$\Lambda_{\nu}^{\prime\mu} = \delta_{\nu}^{\mu} + \epsilon \Omega_{\nu}^{\mu}, \quad \epsilon \rightarrow 0. \quad (2.7)$$

После приравнивания нулю коэффициента при первой степени ϵ в уравнении (2.6) получаем, что матрица $\hat{\Omega}$ должна удовлетворять уравнению

$$\Omega_{\mu\nu} + \Omega_{\nu\mu} = 0.$$

Таким образом, в матрице $\hat{\Omega}$ содержится 6 независимых параметров.

Совершая переход $1/\epsilon$ раз и устремляя $\epsilon \rightarrow 0$, получаем конечное преобразование Лоренца

$$\hat{\Lambda} = \exp(\|\Omega_{\nu}^{\mu}\|). \quad (2.8)$$

Матрица Лоренца, которую можно представить в виде (2.8), соответствует переходу между системами координат, у которых время течёт в одну сторону, т.е. $\Lambda_0^0 > 0$, а пространственные оси в обеих системах отсчёта образуют однонаправленную тройку координат.

Число шесть непрерывных параметров в матрице Лоренца можно интерпретировать следующим образом: три параметра суть углы Эйлера, описывающие произвольный поворот пространственных осей одной системы относительно пространственных осей другой системы; остальные три параметра суть три компоненты скорости относительного движения систем координат.

Все остальные матрицы Лоренца, не представимые в виде (2.8), можно получить из (2.8) путём умножения её на матрицы, соответствующие обращению времени или пространственной инверсии. Таким образом, вся совокупность матриц Лоренца параметризуется 6-ю непрерывными параметрами и двумя дискретными.

2.2.2.3 Доказательство сохранения метрического тензора при переходе из одной инерциальной системы координат в другую

Установим ограничения, накладываемые на матрицу перехода $\hat{\Lambda}$ (2.5) постулатами теории относительности, т.е. докажем (2.6).

Для этого рассмотрим два события A и B , таких, что свет, испущенный из A , как раз приходит в B . Это означает, что интервал между этими двумя событиями равен нулю, см. (2.4). Пусть события A и B , в системах отсчёта K и K' имеют координаты

$$K: \quad A: x^{\mu} \quad \text{и} \quad B: x^{\mu} + dx^{\mu}$$

$$K': \quad A: x'^{\mu} \quad \text{и} \quad B: x'^{\mu} + dx'^{\mu}.$$

Переход из системы K в систему K' осуществляется при помощи матрицы $\hat{\Lambda}$ (2.5),

$$dx'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\prime\mu} dx^{\nu}.$$

Запишем условие равенства нулю интервала между A и B в обеих системах отсчёта:

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = 0, \quad (2.9)$$

$$(ds')^2 = g_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = G_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = 0, \quad (2.10)$$

$$G_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}^{\prime\sigma} \Lambda_{\nu}^{\prime\tau} g_{\sigma\tau}.$$

Метрический тензор $\|G_{\mu\nu}\|$ есть метрический тензор системы K' , пересчитанный в системе K . Для каждого dx^{μ} , для которого выполняется (2.9), должно выполняться и равенство (2.10).

Покажем, что из этого требования следует пропорциональность

$$G_{\mu\nu} \propto g_{\mu\nu}$$

между матрицами. Заметим сразу, что матрица $G_{\mu\nu}$ симметрична в силу своего построения. Далее, поскольку равенство (2.9) сохраняется при заменах

$$\{dx^i \rightarrow -dx^i, \quad dx^0 \rightarrow dx^0\},$$

$$\{dx^i \rightarrow \mathcal{O}_j^i dx^j, \quad dx^0 \rightarrow dx^0\},$$

где $\hat{\mathcal{O}}$ – ортогональная матрица, то, во-первых, матричные элементы G_{0i} равны нулю, а во-вторых, сектор G_{ij} пропорционален единичной матрице. Из последнего вытекает, что метрический тензор в новой системе координат пропорционален метрическому тензору в старой системе координат,

$$G_{\mu\nu} \propto g_{\mu\nu},$$

Осталось показать, что коэффициент пропорциональности тождественно равен единице. Мы уже выполнили

условие сохранения нулевого значения интервала, поэтому следует воспользоваться дополнительными соотношениями.

Абсолютное значение детерминанта метрического тензора $\|G_{\mu\nu}\|$ равно квадрату детерминанта матрицы Лоренца $\|\Lambda_{\nu}^{\mu}\|$. Поэтому нам надо показать, что абсолютное значение детерминанта матрицы Лоренца равно единице. Пусть

$$(\det \|\Lambda_{\nu}^{\mu}\|)^2 = a.$$

Коэффициент a может зависеть только от абсолютно значения v взаимной скорости \mathbf{v} движения систем координат K' и K . В противном случае нарушится постулат об изотропности пространства. Рассмотрим теперь ещё одну систему координат K'' , которая движется относительно системы K' со скоростью \mathbf{v}' , по модулю равной v , а относительно системы K — со скоростью \mathbf{v}'' . Переходя сначала непосредственно из K в K'' , а потом через систему K' , получаем равенство:

$$a(v'') = a(v)a(v').$$

Зафиксируем теперь величину скоростей v, v' , и будем менять угол между скоростями \mathbf{v} и \mathbf{v}' , тем самым меняя абсолютное значение скорости v'' . При этом единственным способом сохранить верность выписанного равенства является тождественное равенство $a = 1$.

Таким образом, доказано равенство (2.6).

2.2.3 Интервал в пространстве Минковского

Итак, из постоянства скорости света в любой инерциальной системе координат следует, что при преобразовании Лоренца сохраняется метрический тензор $g_{\mu\nu}$. Из сохранения метрического тензора в свою очередь следует, что при преобразовании Лоренца сохраняет своё значение интервал (2.4) между любыми двумя событиями. О таких величинах говорят как о *релятивистских инвариантах*. Для того, чтобы обозначить их причастность к системе тензорного исчисления, см. §§6.1, 6.3, такие величины называют также *скалярами*.

Метрический тензор $g_{\mu\nu}$ не знакоопределённый, что отличает его от евклидовой метрики, которая определяет расстояние между двумя точками. Метрику (2.4) называют *метрикой Минковского*, а линейное пространство, в котором введена такая метрика — *пространством Минковского*. При ортогональном повороте в пространстве Евклида расстояние, вычисленное по единичной метрике, сохраняется. Поэтому можно сказать, что преобразование Лоренца совершает поворот в пространстве Минковского. Аналогия с метрикой Евклида не полная: метрика Минковского в силу своей знакоопределённости не обладает свойством нормы (т.е. неравенство треугольника в общем случае не выполняется), тогда как метрика Евклида свойством нормы обладает, см. (6.24).

2.2.3.1 Времене-подобные интервалы

Если интервал (2.4) между событиями (2.2) имеет положительное значение,

$$(ds)^2 > 0,$$

то такой интервал называется *времене-подобным*. Существует система координат, в которой у 4-вектора dx^{μ} , ненулевой является только временная компонента,

$$dx^0 = \sqrt{ds^2}, \quad dx^i = 0,$$

то есть эти события A и B происходят в одной и той же точке пространства, но в разное время.

2.2.3.2 Пространственно-подобные интервалы

Если интервал (2.4) между событиями (2.2) имеет отрицательное значение,

$$(ds)^2 < 0,$$

то такой интервал называется *пространственно-подобным*. Существуют системы координат, в которых у 4-вектора dx^{μ} , временная компонента является нулевой, а пространственная часть имеет ненулевые компоненты

$$dx^0 = 0, \quad |\mathbf{r}| = \sqrt{-(ds)^2},$$

то есть события A и B происходят одновременно, но в разных точках пространства.

2.2.4 Частный пример преобразования Лоренца: лоренцевский буст

Наиболее известным частным видом преобразования Лоренца является случай, когда системы отсчёта K и K' имеют попарно параллельные друг другу пространственные оси координат, и K' движется относительно K со скоростью V , направленной вдоль оси Ox , см. Рис. 2.1. Примем также для простоты, что начала систем координат совпадают, т.е. в (2.5) $x^{\nu,0} = 0$.

В выбранном случае координаты y, z не изменяются при смене системы координат, поэтому матрица преобразования Лоренца является блочно-диагональной,

$$\|\Lambda_{\nu}^{\mu}\| = \begin{pmatrix} \hat{\lambda} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \quad \hat{\lambda} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

где в выражении для матрицы $\|\Lambda_{\nu}^{\mu}\|$ в правой части все матричные элементы являются матрицами 2×2 . Условие сохранения метрического тензора (2.6), записанное на матрицу 2×2 $\hat{\lambda}$, налагает на её матричные элементы три независимых условия, поскольку транспонирование (перестановка индексов $\mu \leftrightarrow \nu$) приводит к тому же самому уравнению. Таким образом, четыре матричных элемента $\hat{\lambda}$ определяются всего одним параметром — абсолютным значением скорости V относительного движения

систем координат. В (2.11) выписан явный вид матрицы перехода, где γ -фактор и безразмерная скорость β определяются равенствами

$$\beta = \frac{V}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (2.12)$$

Проверим, что величина V здесь действительно имеет смысл относительного движения систем координат. Для этого выпишем закон преобразования (2.5), вытекающий из (2.11), непосредственно:

$$t' = \frac{t - xV/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (2.13)$$

Положение начала пространственных координат системы K' задаётся уравнением $x' = 0$, которое согласно (2.13) эквивалентно $x = vt$, т.е. система K' относительно системы K действительно движется со скоростью V в направлении оси Ox .

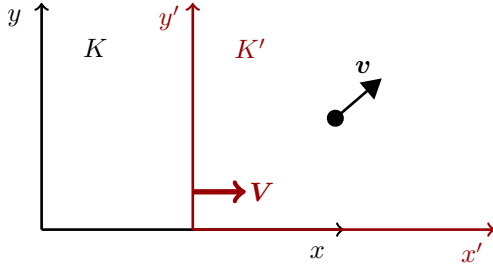


Рис. 2.1 Преобразование Лоренца – лоренцевский буст. Система K' движется относительно системы K со скоростью V вдоль оси Ox . Оси двух систем параллельны друг другу. Частица движется со скоростью v в системе K .

Собственно говоря, Х.А. Лоренц изучал именно частный вид (2.11) преобразования координат. Хотя вместо 6 параметров для общего случая это преобразование содержит только 1 параметр, с физической стороны дела преобразование (2.11) содержит все специфические свойства преобразования Лоренца. В англоязычной литературе преобразование (2.11) называют лоренцевским бустом (*Lorentz boost*).

Матрица обратного перехода получается заменой $V \rightarrow -V$.

2.2.4.1 Быстрота

Матрицу (2.11) можно также записать в виде (2.8). Для этого отбросим сейчас координаты y, z , которые не изменяются при преобразовании, после чего останутся матрицы 2×2 . Матрица инфинитезимально малого ‘поворо-

та’ $\hat{\Omega}$ имеет вид

$$\|\Omega_{\mu\nu}\| = \epsilon \begin{pmatrix} 0 & -\varphi \\ \varphi & 0 \end{pmatrix},$$

$$\|\Omega^\mu{}_\nu\| = \|g^{\mu\rho}\Omega_{\rho\nu}\| = \epsilon \begin{pmatrix} 0 & -\varphi \\ -\varphi & 0 \end{pmatrix},$$

то есть согласно (2.8) сама матрица преобразования Лоренца

$$\hat{\lambda} = \exp \begin{pmatrix} 0 & -\varphi \\ -\varphi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch } \varphi & -\text{sh } \varphi \\ -\text{sh } \varphi & \text{ch } \varphi \end{pmatrix}, \quad \beta = \text{th } \varphi. \quad (2.14)$$

Как и следовало ожидать, параметр φ однозначно связан со скоростью v . Этот параметр называется *быстротой* (*rapidity*).

Быстрота как параметр удобна тем, что при двух последовательных преобразованиях для неё работает аддитивный закон сложения. Пусть система координат K_2 движется относительно системы K_1 со скоростью v_{21} вдоль оси Ox , а система K_3 движется относительно системы K_2 со скоростью v_{32} также вдоль оси Ox ; пространственные оси всех трёх координат параллельны друг другу. Скорости v_{21} соответствует быстрота φ_{21} , скорости v_{32} – быстрота φ_{32} . Тогда быстрота φ_{31} , соответствующая переходу из K_1 в K_3 , равна

$$\varphi_{31} = \varphi_{32} + \varphi_{21}, \quad v_{31} = \frac{v_{32} + v_{21}}{1 + v_{21}v_{32}/c^2}. \quad (2.15)$$

что следует из представления матрицы Лоренца в виде (2.14).

2.2.4.2 Сокращение размеров движущегося тела в направлении движения

Пусть стержень длиной L , расположенный вдоль оси Ox , в лабораторной системе K движется вдоль этой же оси со скоростью v . В таком случае в системе K' этот стержень покоится и она называется сопровождающей системой координат.

Вопрос, который нас интересует: какова видимая длина стержня в лабораторной системе K ?

Обозначим концы стержня ‘a’ и ‘b’, так что $x'_b - x'_a = L$. По смыслу измерения расстояния, мы должны производить измерение длины стержня фиксируя время, так что в лабораторной системе $t_b = t_a$. Используя преобразование Лоренца из K в K' , получаем соотношение

$$L = x'_b - x'_a = \gamma(x_b - x_a).$$

Таким образом, видимая длина стержня в системе K сократилась в γ раз,

$$L_K = x_b - x_a = \frac{L}{\gamma}. \quad (2.16)$$

Этот феномен называют *лоренцевским сокращением длины* (*Lorentz contraction*).

Другой релятивистский эффект, заключающийся в том, что часы, связанные с движущимся телом, идут в γ раз медленнее, чем в лабораторной системе координат, обсуждается в Пункте 2.3.3.1.

2.2.5 Частный пример преобразования Лоренца: поворот в пространстве

Пусть системы K и K' неподвижны друг относительно друга, однако их пространственные оси повернуты относительно друг друга. Таким образом, преобразование координат ограничивается преобразованием пространственных координат матрицей ортогонального поворота \hat{O} размерности 3×3 . Матрица Лоренца в этом случае

имеет вид

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \hat{O} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

где $\vec{0}$ — столбец из трёх нулей, а $\vec{0}^T$, соответственно, — строка из трёх нулей.

Любое преобразование Лоренца $\hat{\Lambda}$, не содержащее в себе операции инверсии и обращения времени, может быть представлено в виде

$$\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}_{O1} \hat{\Lambda}_B \hat{\Lambda}_{O2}, \quad (2.18)$$

где $\hat{\Lambda}_{O1}$ и $\hat{\Lambda}_{O2}$ являются матрицами поворота типа (2.17), а $\hat{\Lambda}_B$ — матрица лоренцевского буста (2.11).

§2.3. Движение материальной точки

В релятивистской механике в теорию не могут быть включены абсолютно твёрдые протяжённые тела. Действительно, рассмотрение движения абсолютно твёрдого тела приводит к парадоксам. Например, к первому парадоксу можно прийти, рассматривая вращение диска с постоянной угловой скоростью. Как было показано в Пункте 2.2.4.2, при поступательном движении размер тела в направлении этого движения сокращается. Мы можем разбить окружность диска на небольшие почти прямые участки. Каждый участок получит сокращение, то есть длина окружности диска станет меньше. С другой стороны, суммарно длина окружности должна остаться той же самой, поскольку направление радиуса не претерпевает релятивистского сокращения. Второй парадокс содержится в ускоренном движении абсолютно твёрдого тела под действием внешней силы. С одной стороны, поскольку тело абсолютно твёрдое, то сила, приложенная к его одной точке, должна тут же вызывать ускорение всех точек тела. Но это означает, что взаимодействие передаётся с бесконечно большой скоростью, поскольку тело является протяжённым в пространстве. Мгновенная передача взаимодействия, однако, запрещена постулатом релятивистской механики.

Поэтому в некантовой релятивистской теории массивные частицы могут рассматриваться только как материальные точки. Движение любого тела (материальной точки) задаётся линией в 4-х мерном пространстве времени. Действительно, в каждый момент времени тело находится в определённой точке пространства.

Любое взаимодействие в релятивистской механике распространяется со скоростью не превосходящей скорости света. Поэтому и любые частицы не могут распространяться быстрее скорости света, в противном случае они могли бы служить переносчиком сверх-светового взаимодействия. С каждой массивной частицей может быть связана система отсчёта. Поэтому массивные частицы могут распространяться только со скоростью,

строго меньшей скорости света. В противном случае свет, испущенный в направлении движения частицы, в её системе координат оказался покоящимся.

2.3.1 Мировая линия частицы

Пусть движение частицы описывается параметрически

$$x^\mu = x^\mu(s), \quad (2.19)$$

через некоторый параметр s . Траектория (2.19), описывающая движение тела в 4-х мерном пространстве-времени, называется мировой линией.

В трёхмерных обозначениях 4-вектор $x^\mu = \{ct, \mathbf{r}\}$, и трёх-мерная скорость тела \mathbf{v} имеет компоненты

$$v^i = \frac{dr^i}{dt} = c \frac{dx^i}{ds} / \frac{dx^0}{ds}. \quad (2.20)$$

2.3.1.1 Световой конус

На Рисунке 2.2 изображена траектория частицы в плоскости координат $\{ct, x\}$. Поскольку скорость частицы всегда меньше скорости света, то наклон касательной к мировой линии на этом рисунке должен быть всегда больше, чем $\pi/4$. Вообще, если частица находилась в начале координат, то в дальнейшем она может попасть только в область $\mathbf{r}^2 < c^2 t^2$, $t > 0$. Повлиять на состояние в этой точке могут только события из области $\mathbf{r}^2 \leq c^2 t^2$, $t < 0$. Область $\mathbf{r}^2 \leq c^2 t^2$ называется световым конусом для точки $x^\mu = 0$.

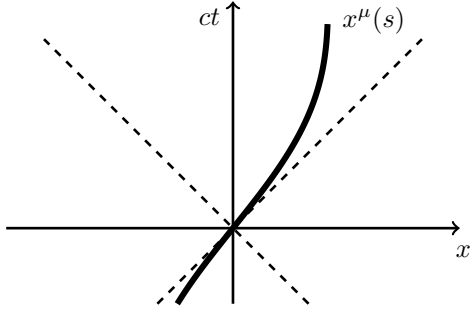


Рис. 2.2 Мировая линия массивной частицы.

Образующая светового конуса обозначена пунктирной линией. Наклон касательной к мировой линии должен быть всегда больше $\pi/4$.

2.3.2 Движение свободного тела в инерциальной системе отсчёта

Движение свободного тела в инерциальной системе отсчёта представляет из себя прямую линию, так что мировая линия (2.19) может быть представлена в виде:

$$x^\mu(s) = p^\mu s + x^{\mu,0}, \quad (2.21)$$

где p^μ и $x^{\mu,0}$ не зависят от s . Параметры $x^{\mu,0}$ задают начальное положение тела. В будущем под 4-вектором p^μ будет пониматься 4-импульс частицы, однако здесь это пока что просто некоторый касательный вектор к мировой линии частицы.

Вектор p^μ хотя и имеет 4 координаты, однако в действительности в этом векторе содержится только 3 независимых параметра, определяющих траекторию движения частицы. Действительно, для определения (прямой) мировой линии частицы достаточно указать только её направление. Этими 3-мя независимыми параметрами могут быть в том числе и компоненты 3-х мерной скорости тела \mathbf{v} , см. (2.20)

$$v^i = c \frac{p^i}{p^0}. \quad (2.22)$$

2.3.2.1 4-скорость тела

Для массивного тела, движущегося всегда со скоростью меньше световой, возможно так перемасштабировать параметр s в (2.21), чтобы он имел смысл интервала s (2.4) между двумя событиями на мировой линии частицы. Для этого случая мы переходим к стандартному обозначению $p^\mu \rightarrow u^\mu$, где 4-вектор u^μ называется вектором *4-скорости тела*. Из цепочки равенств

$$\begin{aligned} s^2 &= (s_2 - s_1)^2 = \\ &= g_{\mu\nu} (x^\mu(s_2) - x^\mu(s_1)) (x^\nu(s_2) - x^\nu(s_1)) = \\ &= g_{\mu\nu} u^\nu u^\mu (s_2 - s_1)^2, \end{aligned} \quad (2.23)$$

вытекает, что 4-вектор скорости u^μ в (2.21) должен быть нормирован на единицу,

$$u^\mu u_\mu = 1. \quad (2.24)$$

При выборе 4-скорости в качестве касательного вектора к мировой линии естественно заменить обозначение $s \rightarrow s$.

Если скорость частицы равна скорости света, то ввести 4-скорость согласно нормировке (2.24) невозможно, поскольку в этом случае в (2.21)

$$p^\mu p_\mu = 0. \quad (2.25)$$

2.3.2.2 Связь 4-скорости с трёх-мерными обозначениями

Введём безразмерную трёх-мерную скорость

$$\beta^i = v^i/c, \quad \beta^2 < 1$$

(последнее неравенство выполняется всегда, поскольку массивная частица движется со скоростью, меньшей скорости света), а также параметр

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \geq 1,$$

называемый γ -фактором. Тогда 4-скорость можно записать в виде

$$\|u^\mu\| = \left\{ \gamma, \gamma \frac{\mathbf{v}}{c} \right\} \equiv \{ \gamma, \gamma \beta \}. \quad (2.26)$$

Если частица движется с малой скоростью, так что $v \ll c$, то такая частица называется *нерелятивистской*. В противном случае, когда её скорость v сравнима со скоростью света c , частица называется *релятивистской*. Если γ -фактор велик, $\gamma \gg 1$, то такую частицу называют *ультрарелятивистской*.

2.3.3 Общий случай движения частицы

Теперь рассмотрим общий случай (2.19) движения массивной материальной точки, когда она может двигаться в том числе и ускоренно. Возможно выбрать определение параметра $s \equiv s$ в (2.19) “естественным образом”, т.е. так, что приращение ds есть интервал между событиями разделёнными вектором dx^μ :

$$\begin{aligned} x^\mu &= x^\mu(s), \quad dx^\mu = x^\mu(s + ds) - x^\mu(s), \\ ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Таким образом, (2.27) есть обобщение (2.23) на случай неравномерного движения тела. При таком определении параметра s мгновенная 4-скорость тела даётся равенством

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}. \quad (2.28)$$

Легко проверить, что определяющее равенство (2.24) для 4-скорости выполнено. В дальнейшем под s мы всегда будем понимать параметр, выбранный естественным образом.

Для безмассовой частицы ...

2.3.3.1 Собственное время

Предположим, что с телом связаны некоторые часы. Показания часов определяются параметром s : время τ , показываемое на этих часах, равно

$$\tau = \frac{s}{c}$$

с точностью до первоначального положения стрелок этих часов. Действительно, в инерциальной системе отсчёта, в данный момент движущейся с телом, приращение времени

$$d\tau = \frac{ds}{c}$$

вследствие того, что тело в этой системе координат в данный момент покоится и потому изменения его координат в ней равно нулю. Время τ называется *собственным временем* тела (*proper time*), и является атрибутом его мировой линии.

Приращения собственного времени и времени в лабораторной системе отсчёта связаны коэффициентом пропорциональности γ :

$$dt = \gamma d\tau,$$

т.е. собственное время движущейся частицы всегда течёт медленнее (или также, если она покоится), чем время в выбранной инерциальной системе координат.

2.3.3.2 Ускорение

Производную w^μ 4-скорости по параметру s ,

$$w^\mu = \frac{du^\mu}{ds}, \quad (2.29)$$

естественно называть 4-ускорением. Его связь с 3-х мерным ускорением \mathbf{a} однако уже не такая простая, как связь (2.26) для скорости:

$$\|w^\mu\| = \frac{1}{c^2} \{0, \gamma^2 \mathbf{a}\} + \frac{\gamma^4 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})}{c^3} \{1, \boldsymbol{\beta}\}, \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (2.30)$$

2.3.4 Переход из одной системы координат в другую. Сложение скоростей.

Пусть есть две инерциальные системы координат K и K' , переход между которыми (2.5) осуществляется матрицей Лоренца Λ_ν^μ . Рассмотрим движение материальной точки, записанное в виде (2.21), в котором параметр s выбран естественным способом. В силу инвариантности значения интервала, этот параметр один и тот же для обеих систем отсчёта. Поэтому 4-скорость в системе K' есть

$$u'^\mu = \frac{dx'^\mu}{ds} = \frac{\Lambda_\nu^\mu dx^\nu}{ds} = \Lambda_\nu^\mu u^\nu. \quad (2.31)$$

Таким образом, 4-вектор скорости u^ν преобразуется по тому же закону (2.5), что вектор координат x^ν ; собственно поэтому совокупность четырёх чисел u^ν и следует называть 4-вектором.

Рассмотрим теперь частную ситуацию, когда система K' движется относительно системы K вдоль оси Ox со скоростью V_K , см. (2.11), а тело движется в системе K со скоростью \mathbf{v} , см. Рис 2.1. Расписывая (2.31) с учётом (2.26, 2.11) и получаем, что скорость \mathbf{v}' тела в системе K' имеет компоненты

$$v'^x = \frac{v^x - V_K}{1 - v^x V_K / c^2}, \quad v'^{y,z} = \frac{v^{y,z}}{\gamma_K (1 - V_K v^x / c^2)}, \quad (2.32)$$

где β_K и γ_K определяются через V_K как это сделано в (2.12). Таким образом, продольная компонента скорости частицы и её поперечные компоненты по отношению к направлению взаимного движения систем отсчёта преобразуются по-разному.

§2.4. Описание движения частиц в терминах непрерывной среды

Понятие непрерывной среды подразумевает, что все величины (масса, импульс, заряд и т.д.) распределены в пространстве с некоторой объёмной плотностью. Классическая релятивистская механика исходно имеет дело с точечными частицами. Для точечной частицы её масса сосредоточена в каждый момент в одной точке.

Математически, связь между описанием частиц как материальных точек и величинами непрерывной среды осуществляется через δ -функцию Дирака. Напомним, что δ -функция — это такая функция, которая равна нулю во всех точках кроме начала координат, а интеграл от неё по любой окрестности, содержащей начало коор-

динат равен единице.

Установим свойства интегралов и δ -функций в пространстве-времени по отношению к преобразованиям Лоренца. Из (2.6) следует, что детерминант матрицы преобразования Лоренца $\hat{\Lambda}$ по модулю равен единице, то есть единице равен якобиан перехода между старыми и новыми координатами. Поэтому мера интегрирования по 4-х мерному пространству является инвариантом,

$$d\Omega \equiv d^4x = c dt d^3\mathbf{r} = c dt' d^3\mathbf{r}' \equiv d\Omega'. \quad (2.33)$$

Пусть y^μ — некоторое выделенное событие. Тогда, в силу релятивистской инвариантности меры интегрирования

(2.33), инвариантна также 4-х мерная δ -функция

$$\delta^{(4)}(x - y) = \delta^{(4)}(x' - y'), \quad (2.34)$$

$$\delta^{(4)}(x - y) = \frac{1}{c} \delta(t_x - t_y) \delta^{(3)}(\mathbf{r}_x - \mathbf{r}_y).$$

2.4.1 Четырёх-мерный ток

Рассмотрим движение частиц, которое мы хотим описать в терминах непрерывной среды. Каждая частица обладает зарядом и массой. Сейчас мы ставим своей целью описать свойства потоков заряда (то есть объёмной плотности электрического тока) и массы. Для описания движения заряда надо ввести объёмную зарядовую плотность ρ и объёмную плотностью электрического тока \mathbf{j} . Для описания движения массы надо, соответственно, ввести массовую плотность ρ_m и плотность массового потока \mathbf{j}_m . Ниже в этом пункте мы покажем, что объёмная плотность и плотность потока составляют компоненты 4-вектора плотности тока,

$$\|j^\mu\| = \{c\rho, \mathbf{j}\}, \quad \|j_m^\mu\| = \{c\rho_m, \mathbf{j}_m\}. \quad (2.35)$$

2.4.1.1 Уравнение непрерывности

Вывод уравнения непрерывности ...

Экспериментальный факт состоит в том, что (в отличие от массы) существует точный закон сохранения заряда во времени, поэтому

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \partial_t \rho + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (2.36)$$

Уравнение (2.36) называется *уравнением непрерывности (continuity equation)*.

В общем случае закона сохранения массы не существует, а есть единый закон сохранения энергии; масса является одной из форм энергии. В частном случае, когда частицы не рождаются из ничего и не исчезают в никуда, сохраняя при движении свою массу, то верно уравнение непрерывности и для потока массы,

$$\partial_t \rho_m + \operatorname{div} \mathbf{j}_m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\mu j_m^\mu = 0. \quad (2.37)$$

Если частицы могут взаимодействовать друг с другом, то их масса уже не должна сохраняться, см. §3.2, т.е. уравнение (2.37) не выполняется. Отметим также, что размерность плотности массового потока – $\text{г}/(\text{с} \cdot \text{см}^2)$, такая же, как и у объёмной плотности импульса, но физически это разные величины, см. (3.19).

2.4.2 Сохраняющийся полный заряд

Равенство нулю 4-дивергенции 4-вектора плотности потока (2.37) означает, что существует сохраняющаяся величина. В данном случае мы имеем дело с потоком массы, поэтому сохраняющейся величиной является полная масса системы

$$Q = \frac{1}{c} \int d^3 \mathbf{r} j^0 = \int d^3 \mathbf{r} \rho(t, \mathbf{r}) = \text{const}. \quad (2.38)$$

где интегрирование производится при фиксированном времени. Действительно, если посчитать производную $\partial_t Q$ согласно уравнению непрерывности (2.37), то после интегрирования по частям (предполагая, что системы конечна, так что далеко при $r \rightarrow \infty$ нет частиц, и поэтому $\rho \rightarrow 0$) мы получим $\partial_t Q = 0$.

2.4.3 Связь потока с траекториями частиц

С другой стороны, каждая частица (пока не введена квантовая механика) математически описывается материальной точкой. Будем нумеровать частицы индексов a , тогда каждая частица описывает траекторию $\mathbf{r}_a(t)$, которой соответствует мировая линия $x_a^\mu(s)$. В трёхмерных обозначениях объёмная плотность и плотность потока через траектории частиц выражаются следующим образом:

$$\rho(t, \mathbf{r}) = \sum_a e_a \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)), \quad (2.39)$$

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = \sum_a e_a \mathbf{v}_a(t) \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)),$$

где $\mathbf{r}_a(t)$ – траектория частицы номер a . Непосредственной проверкой можно убедиться, что ρ и \mathbf{j} , определённые согласно (2.39), действительно удовлетворяют уравнению непрерывности (2.37).

Четырёх-мерный ток можно также написать в полностью ковариантной форме:

$$\begin{aligned} j^\mu(x) &= c \sum_a e_a \int ds u_a^\mu(s) \delta^{(4)}(x - x_a(s)) = \\ &= c u^\mu(x) \sum_a e_a \int ds \delta^{(4)}(x - x_a), \end{aligned} \quad (2.40)$$

где интегрирование в каждом слагаемом производится вдоль мировой линии частицы, а четырёх-мерная δ -функция определена в (2.34). Когда мы написали второе равенство в (2.40), мы продолжили 4-скорость u^μ как функцию координат с мировой линии частицы на всё пространство. С одной стороны, эта операция виртуальна, поскольку всё равно 4-ток отличен от нуля только когда x попадает на мировую линию одной из частиц. С другой стороны, описание в терминах непрерывной среды интуитивно предполагает, что все величины сглажены и не имеют дискретности; в этом есть физический смысл доопределения 4-скорости u^μ на всё пространство-время.

Поскольку в (2.40) справа стоит интеграл от произведения 4-вектора на 4-скаляр (см. (2.34)), то в целом справа стоит 4-вектор. А значит, так определённое в (2.40) j^μ также является 4-вектором. Осталось показать, что, действительно, справедливо равенство (2.35).

Для этого представим приращение координат вдоль мировой линии в виде

$$\|dx_\alpha^\mu\| = \{c, v_\alpha\}dt, \quad (2.41)$$

и произведём интегрирование в (2.40) по времени. В результате мы придём к выражениям (2.39).

Выражения, аналогичные (2.39,2.40), верны и для потока массы j_m^μ с заменой $e_a \rightarrow m_a$.

2.4.3.1 Релятивистский инвариант

Покажем, что комбинация ρ/γ является релятивистским инвариантом. Действительно, 4-ток можно переписать в виде

$$j^\mu = c \frac{\rho}{\gamma} u^\mu, \quad (2.42)$$

где мы воспользовались тем, что пространственный ток $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$. Трёх-мерная скорость \mathbf{v} и γ -фактор предполагаются продолженными на всё пространство-время с мировых линий так же, как 4-скорость u^μ в (2.35). Комбинация ρ/γ в (2.42) является коэффициентом пропорциональности между двумя 4-векторами, поэтому она является скаляром, то есть остаётся одной и той же во всех системах координат.

2.4.4 Распределение частиц по скоростям

Пусть дан ансамбль одинаковых частиц, распределение скоростей которых описывается функцией распределением $f(\mathbf{u})$, где \mathbf{u} – три пространственные компоненты 4-скорости: для того, чтобы посчитать количество частиц обладающих скоростями принадлежащих интересующей области \mathcal{U} в 3-х мерном пространстве компо-

нент u^i , надо взять интеграл по этой области

$$\int_{\mathcal{U}} f(\mathbf{u}) d^3\mathbf{u}.$$

При переходе в другую инерциальную систему координат функция распределения преобразуется по закону

$$\gamma f(\mathbf{u}) = \gamma' f'(\mathbf{u}'), \quad (2.43)$$

где γ -фактор берётся при соответствующем значении \mathbf{u} , а \mathbf{u}' связано с \mathbf{u} согласно закону преобразования (2.31).

Действительно, сохранение количества частиц при переходе из одной системы координат в другую требует, чтобы выполнялось равенство

$$f(\mathbf{u}) d^3\mathbf{u} = f'(\mathbf{u}') d^3\mathbf{u}',$$

то есть, чтобы выражение $f(\mathbf{u})d^3\mathbf{u}$ являлось инвариантом. С другой стороны, выражение

$$\delta(u^\mu u_\mu - 1) du^0 d^3\mathbf{u}$$

(пока написано это выражение, полагаем, что условие $u^\mu u_\mu = 1$ ещё не выполнено) является также инвариантом: первый множитель является инвариантом вследствие того, что скалярное произведение является инвариантом, второе слагаемое инвариантно, поскольку модуль детерминанта матрицы Лоренца (якобиан перехода) равен единице. Интегрируя это выражение по du^0 , получаем, что выражение

$$\frac{d^3\mathbf{u}}{\gamma}$$

есть инвариант. Из сопоставления выписанных нами инвариантов получаем, что инвариантом является также величина (2.43).

Глава 3

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ, ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЧАСТИЦ

§3.1. Действие и уравнения движения для свободной частицы

Описание движения свободной частицы в соответствии с программой, изложенной в Пункте 2.1.3, начнём с построения действия. Действие должно быть интегралом вдоль мировой линии частицы. Для мировой линии инвариантом является только приращение вдоль неё собственного времени (интервала) $d\tau = ds/c$, см. (2.27) и Пункт 2.3.3.1. Поэтому действие должно иметь вид

$$S_m = -mc \int ds = -mc \int \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}, \quad (3.1)$$

где m – коэффициент пропорциональности, который имеет физический смысл массы частицы. Общий знак определяется требованием, чтобы действие имело минимум (а не максимум) на истинной траектории. Таким образом, принцип минимума действия на истинной траектории для свободной частицы даёт максимизацию её собственного времени.

Мировую линию частицы всегда можно параметризовать также и через время t . После этого действие (3.1) переписывается в виде, более похожем на нерелятивистскую запись:

$$S_m = \int dt L, \quad L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (3.2)$$

в котором координаты \mathbf{r} зависят от времени t , а скорость $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$. Если теперь предположить, что частица движется с нерелятивистскими скоростями, так что $v \ll c$, то действие приближённо можно записать в виде

$$S_m = -mc^2 \int dt + \int L' dt, \quad L' = \frac{mv^2}{2}. \quad (3.3)$$

Первый вклад не зависит от траектории частицы, поэтому её определяет только второй вклад, который является действием для нерелятивистской частицы в классической механике. Получив правильное выражение для нерелятивистского лагранжиана L' в (3.3), мы тем самым оправдали выбор общего коэффициента в (3.1).

3.1.1 Вариация мировой линии и действия

Для определения истинной траектории частицы следует найти вариацию действия по вариации мировой линии

частицы. Рассмотрим действие, соответствующее движению частицы от события ‘ a ’ до события ‘ b ’:

$$S_m = -mc \int_a^b \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}.$$

Варьированную мировую линию можно представить в виде (2.27)

$$x^\mu(s) + \delta x^\mu(s), \quad ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

где $\delta x^\mu(s)$ – величина вариации. Отметим, что для варьированной мировой линии параметризующий её s в общем случае уже не является естественным параметром в смысле (2.27). Вариация действия, линеаризованная по слабому изменению мировой линии движения частицы, равна

$$\begin{aligned} \delta S_m &= -mc \int_a^b \left(\sqrt{ds^2 + 2dx_\mu d\delta x^\mu} - ds \right) = \\ &= -mc \int_a^b \frac{dx_\mu}{ds} \frac{d\delta x^\mu}{ds} ds = \\ &= mc \int_a^b ds \frac{du_\mu}{ds} \delta x^\mu - mc u_\mu \delta x^\mu \Big|_a^b. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В процессе выкладок мы воспользовались определением 4-скорости (2.28).

3.1.2 Энергия и импульс частицы

Второе слагаемое в (3.4) даёт возможность определить импульс и энергию (гамильтониан) системы согласно равенствам (1.12):

$$\frac{\delta S}{\delta t_b} = -E, \quad \frac{\delta S}{\delta x_b^i} = p^i \quad \Leftrightarrow \quad \{E/c, -\mathbf{p}\} = -\left\| \frac{\delta S}{\delta x_b^\mu} \right\|.$$

В результате получаем, что энергия и импульс частицы составляют 4-вектор, называемый 4-импульсом, пропорциональный 4-скорости тела,

$$\|p_\mu\| = \{E/c, -\mathbf{p}\} = -\left\| \frac{\delta S}{\delta x_b^\mu} \right\| = mc \|u_\mu\|. \quad (3.5)$$

В частности, мы установили, что 4-импульс является касательным вектором к траектории частицы, что оправдывает выбор обозначений в (2.21).

Первое слагаемое в (3.4) определяет уравнения движения:

$$\frac{dp^\mu}{ds} = 0, \quad (3.6)$$

то есть энергия и импульс свободного тела сохраняются по мере его движения. Сохранение энергии и импульса следовало ожидать сразу, поскольку лагранжиан не зависит явно от времени и координат, см. Пункт 1.3.1.2.

Про уравнение движения, записанное в виде (3.6) говорят, что оно записано в *ковариантной форме*. Это означает, что равенство (3.6) имеет вид тензорного равенства в пространстве Минковского, и потому имеет один и тот же вид в любой инерциальной системе отсчёта. Таким образом достигается требование о равноправии инерциальных систем отсчёта, см. Пункт 2.1.2.3.

Воспользуемся (2.26) и свяжем выражения для энергии и импульса частицы с трёх-мерными обозначениями:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma mc^2, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma m\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}c^2}{E} = c \frac{\mathbf{p}}{p^0}.$$

Последнее равенство следует только из того, что p^μ является вектором касательным к мировой линии частицы, см. (2.22). Из (2.24,3.5) следует, что квадрат 4-импульса пропорционален квадрату массы,

$$p^\mu p_\mu = (E/c)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2. \quad (3.8)$$

3.1.2.1 Формула Эйнштейна для массы покоя

Пусть частица покоится, $\mathbf{v} = 0$. Трёх-мерный импульс \mathbf{p} частицы в этом случае как и должно быть равен нулю, тогда как энергия равна

$$E_0 = mc^2. \quad (3.9)$$

Отсюда следует сделать вывод, что масса является одной из форм энергии. Этот факт впервые был осознан А. Эйнштейном, поэтому соотношение (3.9) для энергии покоя частицы массы m называется *формулой Эйнштейна для массы покоя*, см. историческую справку в Окунь, 2008.

Если частица движется, то её энергия превышает энергию покоя. Разницу между этими энергиями можно назвать кинетической энергией

$$E_{\text{kin}} = E - E_0 = (\gamma - 1)mc^2. \quad (3.10)$$

3.1.2.2 Нерелятивистский предел

В нерелятивистском пределе, когда $v \ll c$, можно разложить знаменатель в выражениях (3.7). В результате получим

$$E_{\text{kin}} \approx \frac{mv^2}{2}, \quad \mathbf{p} \approx m\mathbf{v}. \quad (3.11)$$

Таким образом, выражение как для кинетической энергии, так и для импульса совпало с известными выражениями в ньютоновской механике.

3.1.2.3 Гамильтонова форма уравнений движения

Гамильтониан свободной частицы \mathcal{H}

$$\mathcal{H} = \mathbf{p}\mathbf{v} - L = \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4} = E,$$

где мы воспользовались выражением для лагранжиана (3.2). В случае малых скоростей гамильтониан приближённо равен

$$\mathcal{H} \approx mc^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^2 c^2}.$$

Второе слагаемое соответствует гамильтониану частицы в галилеевской механике. Третье слагаемое представляет из себя первую релятивистскую поправку к закону дисперсии массивной частицы.

3.1.3 Безмассовые частицы

Известно, что некоторые элементарные частицы имеют нулевую массу. Такими частицами являются, например, фотон и скорее всего нейтрино. В этом случае квадрат 4-импульса равен нулю,

$$p^\mu p_\mu = 0, \quad \Leftrightarrow \quad E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 \quad (3.12)$$

согласно (3.8).

Для массивных частиц 4-импульс является касательным к мировой линии частицы, см. (3.5) и (2.28). Обобщая это условие на безмассовые частицы заключаем, что они могут двигаться только со скоростью света, поскольку квадрат касательного вектора к мировой линии равен нулю, сравни (3.12,2.25). Для безмассовых частиц невозможно ввести 4-скорость, тогда как их 4-импульс может быть любым, удовлетворяющим условию (3.12).

В Пункте 4.5.3 обсуждается закон преобразования 4-импульса безмассовых частиц при переходе из одной системы отсчёта в другую.

§3.2. Распад и столкновения частиц

Литература: Балдин, Гольданский и Розенталь, 1959

В этом параграфе мы рассмотрим аспекты взаимодействия частиц друг с другом. Детальными взаимодействиями мы здесь не интересуемся, поскольку построение теорий этих взаимодействий находится за рамками классической релятивистской электродинамики. Важным свойством этих взаимодействий является их короткодействие. Иными словами, когда частицы находятся далеко друг от друга, этими взаимодействиями можно пренебречь. Поэтому мы будем пользоваться приближением, в котором частицы не взаимодействуют, пока они находятся на далёком расстоянии, так что их можно считать свободными. Мы рассматриваем только начальную конфигурацию частиц (в “далёком прошлом”) и конечную конфигурацию (в “далёком будущем”).

Столкновения частиц, в результате которых частицы меняют своё внутреннее состояние или рождаются новые частицы, называются неупругими столкновениями. Важным утверждением классической релятивистской электродинамики является утверждение, что масса является формой энергии, см. Пункт 3.1.2. Сама же энергия является частью 4-импульса. Таким образом, хотя законы сохранения энергии и импульса были получены нами в случае отсутствия неупругих столкновений, пользуясь физическими соображениями, мы должны его распространить на случай также и неупругих столкновений.

3.2.1 Распад частицы

Рассмотрим сначала распад частицы массы M , за которым следит некоторый наблюдатель. Введём понятие лабораторной системы отчёта K_L ; наблюдатель в этой системе отчёта является неподвижным. В этой системе отчёта частица до распада двигалась со скоростью \mathbf{V} и имела 4-импульс p^μ . Введём также сопровождающую систему координат K'_M , которая движется со скоростью частицы, так частица в ней покоится.

Частица распадается на N частиц (продуктов распада), которые после совершения процесса распада уже не взаимодействуют друг с другом. Эти частицы мы будем нумеровать индексом a ; массы частиц равны m_a , их 4-импульсы равны p_a^μ .

Рассмотрим закон сохранения энергии и импульса, записанный в ковариантной форме

$$\sum_{a=1}^N p_a^\mu = p^\mu. \quad (3.13)$$

Если прочесть это равенство в обратную сторону, то можно сделать следующее заключение. 4-импульс p^μ есть суммарный импульс системы, состоящей из N частиц. Если известны только импульсы продуктов распада, то воспользовавшись формулами (3.13, 3.8, 3.7), мы

можем последовательно найти полные 4-импульс системы, её эффективную массу и скорость системы центра масс.

Теперь перейдём в сопровождающую систему отчёта K'_M . Уравнение (3.13) на нулевую компоненту 4-импульса тогда примет вид

$$M = \sum_{a=1}^N \frac{m_a}{\sqrt{1 - v_a^2/c^2}} \geq \sum_{a=1}^N m_a. \quad (3.14)$$

Таким образом, суммарная масса покоя продуктов распада не может быть больше чем масса покоя распавшейся частицы. В реальности она всегда меньше, поскольку часть энергии покоя распавшейся частицы переходит в кинетическую энергию продуктов распада.

Конечно, уравнение (3.13) не фиксирует полностью направления и скорости вылета продуктов распада. Эти параметры зависят от внутреннего состояния исходной частицы на момент её распада. Чаще всего это состояние определить возможно только вероятностным образом, и поэтому к описанию состояния продуктов распада должны также применяться статистические методы.

Рассмотрим наиболее простой случай, когда частица распадается на две частицы, и перейдём в сопровождающую систему координат. В таком случае закон сохранения импульса приводит к

$$\mathbf{p}'_2 = -\mathbf{p}'_1.$$

Естественней всего предположить, что все направления вылета частицы №1 равновероятны, тогда в нашем случае выписанное уравнение даёт условную вероятность для направления импульса частицы №2.

3.2.2 Столкновение частиц

При упругом столкновении частиц их количество и внутренние свойства не меняются, а изменяется только скорость движения. Пусть до столкновения частицы имели импульсы p_a^μ , а после столкновения они приобрели импульсы \tilde{p}_a^μ . По закону сохранения 4-импульса

$$\sum_{a=1}^N \tilde{p}_a^\mu = \sum_{a=1}^N p_a^\mu = P^\mu.$$

общий 4-импульс системы P^μ сохраняется.

В случае неупругого столкновения частиц основной интерес представляет случай, когда две относительно лёгкие частицы сталкиваются с ультрарелятивистскими скоростями. Эффективная масса M такой системы велика. Благодаря этому в результате столкновения могут быть рождены частицы с массой покоя, значительно превышающей массу покоя сталкивающихся частиц.

Рассмотрим простейший вариант, когда сталкиваются две одинаковых частицы массой m_s , движущиеся

друг навстречу другу с одинаковыми скоростями, по модулю равными v . В результате столкновения эти частицы отдают часть своей кинетической энергии на рождение ещё двух частиц массой m_g :

$$s + s \rightarrow s + s + g + g.$$

Минимальная скорость v , при которой ещё возможна эта реакция, называется порогом реакции. Для того что-

бы его найти, нужно предположить, что после столкновения все частицы оказались в состоянии покоя, так что вся энергия системы оказалась запасённой в энергии покоя:

$$\gamma m_s = m_s + m_g.$$

Если рождающиеся частицы намного тяжелее сталкивающихся, $m_g \gg m_s$, то условие порога можно приближённо записать в виде $\gamma \approx m_g/m_s$.

§3.3. Совокупность частиц как непрерывная среда, тензор энергии-импульса

Перепишем уравнения движения (3.6) в терминах непрерывной среды. Для этого в вариации действия (3.4) (первое слагаемое в последней строчке) от интегрирования по мировым линиям перейдём к интегрированию по пространству-времени:

$$\delta S = -mc \int d\Omega_x \int_a^b ds \delta^{(4)}(x - x_s) u^\nu(x) \partial_\nu u^\mu(x) \delta x_\mu, \quad (3.15)$$

где $x_s = x_s(s)$ – мировая линия частицы, а u^μ – её 4-скорость. Мы положили вариацию пути на концах равной нулю, воспользовались тем, что $d/ds = u^\nu \partial_\nu$ и тем, что если под интегралом стоит $\delta^{(4)}(x - x_s)$, то любой множитель, исходно зависящий от параметра s на мировой линии, можно считать и функцией 4-координаты x ; таким образом произвели замену

$$\frac{du^\mu(x_s)}{ds} \rightarrow \int d\Omega_x \delta^{(4)}(x - x_s) u^\nu(x) \partial_\nu u^\mu(x).$$

Согласно уравнению (2.40), записанному для потока массы, вариацию (3.15) теперь можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d\Omega j_m^\nu \partial_\nu u^\mu \delta x_\mu = \frac{1}{c} \int d\Omega \partial_\nu T^{\nu\mu} \delta x_\mu, \\ T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu} &= c j_m^\nu u^\mu = \frac{c^2 \rho_m}{\gamma} u^\mu u^\nu. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Тензор $T^{\mu\nu}$ называется *тензором энергии-импульса* (*stress-energy tensor*). Как следует из последней записи (3.16), мы получили его в симметричном виде. Мы также воспользовались уравнением непрерывности (2.37), верным в нашем случае, поскольку при движении каждая частица в рассматриваемой модели по отдельности сохраняет свою массу. Таким образом, уравнениями движения в терминах непрерывной среды являются

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (3.17)$$

Уравнения (3.17) эквивалентны уравнению движения частиц (3.6), в чём можно убедиться, проделывая выкладки в обратном порядке, от (3.17) к (3.4).

Тензор энергии-импульса является физически важным понятием в физике, через него выражаются законы сохранения. Здесь мы ввели этот тензор только для массивных точечных частиц, сохраняющих при движении свою массу покоя. Для совокупной системы частиц и электромагнитного поля этот тензор будет обсуждаться в §4.3.

3.3.1 Законы сохранения

Рассмотри более подробно уравнения (3.17). Как обсуждалось в Пункте 2.4.1, равенство нулю 4-дивергенции векторного поля означает, что существует сохраняющаяся во времени величина, см. (2.38). В (3.17) 4 уравнения (количество значений индекса ν), поэтому существует 4 сохраняющиеся величины. Понятно, что этими величинами должны быть полная энергия системы и три компоненты пространственного импульса.

Для того, чтобы показать это, рассмотрим матричную структуру тензора энергии-импульса. В случае общего положения эту структуру для выделения физического смысла компонент имеет смысл представить в виде

$$\|T^{\mu\nu}\| = \left(\begin{array}{c|c} \varepsilon \mathcal{E} & c \vec{p}^T \\ \hline \mathbf{S} & -\hat{\sigma} \\ \hline c & \end{array} \right). \quad (3.18)$$

Мы ввели объёмные плотности энергии ε , потока импульса \vec{p} , вектора потока энергии \mathbf{S} , а также тензор напряжений σ^{ik} , являющийся симметричной матрицей 3х3:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= T^{00}, & \sigma^{ik} &= -T^{ik}, \\ p^i &= T^{0i}/c, & S^i &= cT^{i0}, & \mathbf{S} &= c^2 \vec{p}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

Трёх-мерные вектора потока энергии и плотности импульса пропорциональны друг другу.

В (3.18) в верхней строчке стоят величины. интеграл от которых по пространству равен полному 4-импульсу системы

$$\|P^\mu\| = \{E/c, \mathbf{P}\}, \quad P^\mu = \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{r} T^{0\mu} \quad (3.20)$$

и являются сохраняющейся величиной, сравни с (2.38). В трёх нижних строчках (3.18) стоит поток сохраняющихся величин P^μ .

Нижние три строчки в (3.18) представляют из себя потоки соответствующих величин. Действительно, если в (3.17) положить, например, $\nu = 0$, то согласно введённым обозначениям мы получим

$$\partial_t \varepsilon + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0. \quad (3.21)$$

Видна прямое соответствие этого уравнения с уравнением непрерывности для заряда, см. (2.36). Поток импульса \vec{p} представляет из себя не вектор, а матрицу 3×3 , поскольку сам импульс - векторная величина. Согласно введённым обозначениям, если в (3.17) положить $\nu = k$, то мы придём к уравнению

$$\partial_t p^k - \partial_i \sigma^{ik} = 0. \quad (3.22)$$

3.3.1.1 Свободные частицы

В нашем случае, когда идёт речь о частицах, компоненты тензора энергии-импульса (здесь мы добавили в индекс символы (m) для подчеркивания того, что речь идёт о частицах; далее в этом параграфе мы для краткости пишем снова просто $T^{\mu\nu}$)

$$\|T^{(m)\mu\nu}\| = \begin{pmatrix} \varepsilon & p^x c & p^y c & p^z c \\ \hline \varepsilon v^x / c & p^x v^x & p^y v^x & p^z v^x \\ \varepsilon v^y / c & p^x v^y & p^y v^y & p^z v^y \\ \varepsilon v^z / c & p^x v^z & p^y v^z & p^z v^z \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Как следует из (3.16), в (3.23) объёмные плотности энергии ε и потока импульса \vec{p}

$$\varepsilon = \gamma \rho_m c^2, \quad \vec{p} = \gamma \rho_m \mathbf{v} = \gamma \mathbf{j}_m \quad (3.24)$$

§3.4. Движение заряженной частицы в электромагнитном поле

Электромагнитное поле задаётся 4-мя степенями свободы. Эти степени свободы составляют 4-вектор A^μ , который называется 4-потенциалом электромагнитного поля. Удобно выделить в 4-потенциале нулевую и три пространственных компоненты, представив его в виде

$$\|A^\mu\| = \{\varphi, \mathbf{A}\}. \quad (3.26)$$

Величина φ называется *скалярным потенциалом*, вектор \mathbf{A} называется *вектор-потенциалом*.

То, что электромагнитное поле задаётся 4-потенциалом A^μ , конечно не является само разумеющимся. Справедливость этого будет подтверждена ниже, когда будут получены знакомые из общей физики сила Лоренца (3.39) и уравнения Максвелла (4.9,4.16).

Полный 4-импульс системы (3.20) естественным образом может быть выражен в виде суммы по отдельным частицам,

$$E = \sum_\alpha \gamma_\alpha m_\alpha c^2, \quad P^i = \sum_\alpha \gamma_\alpha m_\alpha v_\alpha^i$$

Если запись (3.18) тензора энергии-импульса верна для материи любого типа, то запись (3.23) специфична именно для системы массивных частиц без поля. Для такой системы поток каждой компоненты $\{\varepsilon, \vec{p}\}$ равен ей же, помноженной на локальную скорость. Для демонстрации этого, перепишем уравнение (3.22) на локальное изменение плотности импульса для свободных частиц:

$$\partial_t p^i + \partial_k (v^k p^i) = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \partial_t \vec{p} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \vec{p} = 0. \quad (3.25)$$

Например, величина $\vec{p} v^x$ есть плотность потока вектора импульса в x -направлении. Отметим, что в отличие от плотности потока массы \mathbf{j}_m , плотность потока импульса \vec{p} (3.19) не является частью какого-либо 4-вектора. Уравнение на плотность энергии (3.21) выглядит как

$$\partial_t \varepsilon + \operatorname{div}(\mathbf{v} \varepsilon) = 0, \quad \mathbf{S} = \varepsilon \mathbf{v}.$$

3.3.2 Непрерывная среда в пределе отсутствия неупругих столкновений

Пусть частицы не испытывают неупругих столкновений друг с другом (например, мы имеем дело с космической пылью), так что по мере движения их масса сохраняется. Тогда верно уравнение непрерывности (2.37), которое даёт возможность переписать уравнение (3.25) в виде

$$\partial_t (\gamma \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \gamma \mathbf{v} = 0. \quad (3.25a)$$

3.4.1 Вклад в действие, лагранжиан и гамильтониан

Сейчас мы изучаем вклад в действие, ответственный за взаимодействие частицы и электромагнитного поля. Этот вклад имеет следующий вид

$$S_{\text{int}} = -\frac{1}{c^2} \int d\Omega A_\mu j^\mu = -\sum_a \frac{e_a}{c} \int A_\mu(x_a) dx_a^\mu. \quad (3.27)$$

При преобразовании действия от одного вида к другому мы воспользовались формулой (2.40) и выражением (2.33) для элемента 4-объёма. Первый вид действия в (3.27) записан в терминах непрерывной среды. Он может быть более удобен для определения отклика поля на движение заряженных частиц. Здесь мы пока реша-

ем обратную задачу: в заданном поле найти движение частицы. Поэтому нам более удобен второй вид, в котором интегрирование происходит вдоль мировых линий частиц.

Действие (3.27) релятивистски инвариантно, поскольку релятивистски инвариантны как элемент 4-объёма $d\Omega$, так и скалярное произведение двух векторов.

Для простоты будем в дальнейшем рассматривать одну частицу, траектория которой есть $\mathbf{r}(t)$.

3.4.1.1 Трёх-мерный вид лагранжиана и гамильтониана

Перепишем действие (3.27) в трёхмерных обозначениях. Воспользуемся представлением (2.41) для приращения 4-координаты вдоль мировой линии, в результате чего представим действие в виде (1.1) с лагранжианом

$$L_{\text{int}} = \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} - e\varphi. \quad (3.28)$$

Для того, чтобы получить полный лагранжиан L массивной заряженной частицы в электромагнитном поле, этот вклад надо сложить с вкладом для свободной частицы (3.2):

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} - e\varphi. \quad (3.29)$$

Вектор-потенциал \mathbf{A} и скалярный потенциал φ должны браться в точке положения частицы \mathbf{r} .

Обобщённый импульс \mathbf{p}_{gen} , канонически сопряжённый с координатой частицы \mathbf{r} , находится по общей формуле (1.4):

$$\mathbf{p}_{\text{gen}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}, \quad \mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}, \quad (3.30)$$

где простой импульс частицы \mathbf{p} дан выражением (3.7). Гамильтониан \mathcal{H} заряженной массивной частицы во внешнем поле равен

$$\mathcal{H} = \gamma m c^2 + e\varphi,$$

то есть полная энергия равна сумме энергии покоя $E_0 = mc^2$, кинетической энергии $E_{\text{kin}} = (\gamma - 1)mc^2$ и потенциальной энергии заряда во внешнем поле $e\varphi$. Перепишем гамильтониан в более естественном для него виде, как функцию координаты и обобщённого импульса:

$$\mathcal{H} = \sqrt{m^2 c^4 + \left(\mathbf{p}_{\text{gen}} - \frac{e}{c} \mathbf{A}\right)^2} c^2 + e\varphi, \quad (3.31)$$

сравни с (3.8). Если имеет место нерелятивистский предел, то второе слагаемое под корнем мало, так что гамильтониан

$$\mathcal{H} = mc^2 + \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p}_{\text{gen}} - \frac{e}{c} \mathbf{A}\right)^2 + e\varphi. \quad (3.32)$$

Без первого слагаемого этот гамильтониан имеет вид *гамильтониана Паули* (без вклада от спина частицы), используемого в квантовой механике для описания движения заряженной нерелятивистской частицы в электромагнитном поле.

3.4.2 Уравнения движения

Проведём варьирование действия

$$S = S_m + S_{\text{int}}$$

таким же образом, как это было сделано для действия для свободной частицы S_m (3.1). Для сокращения записи будем предполагать вариацию пути равной нулю на концах, поскольку мы уже нашли гамильтониан (3.31) и обобщённый импульс (3.30). Вариация действия равна

$$\delta S = - \int p^\mu ds \delta x_\mu - \frac{e}{c} \int \left(A_\mu \frac{d\delta x^\mu}{ds} + \delta A_\nu \frac{dx^\nu}{ds} \right) ds.$$

Первое слагаемое в действии мы написали, воспользовавшись (3.4). Первое слагаемое в круглой скобке проинтегрируем по частям. Во втором слагаемом изменение 4-потенциала при вариации происходит потому, что он зависит от координаты, которая изменилась при вариации. В процессе преобразования пользуемся соотношениями

$$\frac{dA_\mu}{ds} = u^\nu \partial_\nu A_\mu, \quad \delta A_\nu = \delta x^\mu \partial_\mu A_\nu, \quad dx^\nu = u^\nu ds.$$

В результате приходим к тому, что

$$\delta S = \int ds \left(\frac{dp_\mu}{ds} - \frac{e}{c} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) u^\nu \right) \delta x^\mu. \quad (3.33)$$

Таким образом, уравнение движения в ковариантной форме есть

$$\frac{dp_\mu}{ds} = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u^\nu, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3.34)$$

3.4.3 Тензор электромагнитного поля

Итак, уравнение движения (3.34) гласит, что импульс заряженной изменяется под действием электромагнитного поля, которое зашито в тензоре второго ранга $F^{\mu\nu}$. Этот тензор называется *тензором электромагнитного поля* (*electromagnetic tensor*). Из его определения следует, что он антисимметричен по своим индексам,

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}. \quad (3.35)$$

Это означает, что он содержит всего 6 независимых компонент, а его диагональные элементы равны нулю, $F^{\mu\mu} = 0$. Выпишем явно матричную структуру тензора электромагнитного поля:

$$\|F_{\mu\nu}\| = \begin{matrix} \downarrow & \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & E^j & & \\ -E^i & -\epsilon_{ijk} B^k & & \end{array} \right) & \begin{matrix} \mu = i \\ \nu = j \end{matrix} \end{matrix} = \begin{matrix} \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & E^x & E^y & E^z \\ \hline -E^x & 0 & -B^z & B^y \\ -E^y & B^z & 0 & -B^x \\ -E^z & -B^y & B^x & 0 \end{array} \right) & \end{matrix} \quad (3.36)$$

Величина \mathbf{E} ведёт себя как вектор, а \mathbf{B} — как псевдовектор (аксиальный вектор) в трёхмерном пространстве. Поле \mathbf{E} называется *электрическим полем*, а поле \mathbf{B} — *магнитным полем*. Эти названия будут оправданы ниже, когда мы запишем уравнение движения частицы (3.34) в трех-мерной форме, см. Пункт 3.4.4. Тензор электромагнитного поля можно кратко переписать в виде

$$\|F_{\mu\nu}\| = (\mathbf{E}, -\mathbf{B}), \quad \|F^{\mu\nu}\| = (-\mathbf{E}, -\mathbf{B}), \quad (3.37)$$

см. определение (6.35).

Свяжем электрическое и магнитное поля непосредственно с 4-потенциалом. Для этого распишем определение тензора электромагнитного поля (3.34) для различных его компонент, см. (3.36):

$$\begin{aligned} F^{i0} = E^i &= -\partial_i A^0 - \partial_0 A^i, & (\mu = i, \nu = 0), \\ F^{ij} = -\epsilon_{ijk} B^k &= -\partial_i A^j + \partial_j A^i & (\mu = i, \nu = j). \end{aligned}$$

Первое уравнение просто перепишем в векторном виде, воспользовавшись определением (3.26) для скалярного и векторного потенциалов, а во втором уравнении перед этим произведём свёртку с ϵ_{lij} . В результате получим

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} - \text{grad } \varphi, \quad (3.38)$$

$$\mathbf{B}^l = \epsilon_{lij} \partial_i A^j \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

§3.5. Собственный спин частиц

Обзорная работа по теме: Тернов и Бордовицын, 1980.

Рассмотрим тело, центр масс которого покоится, и которое может вращаться в пространстве и имеет магнитный момент $\boldsymbol{\mu}$, жёстко связанный с его пространственной ориентацией. Тогда уравнение движения тела может быть записано в виде

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}], \quad (3.41)$$

см. (7.30). Отметим, что 3-х мерный вектор механического момента не зависит от точки отсчёта системы координат, поскольку скорость центра масс равна нулю. Правая же часть этого уравнения по определению от выбора точки отсчёта не зависит.

Если магнитное поле неоднородно, то на тело дей-

3.4.4 Уравнения движения в трёхмерной форме

Рассмотрим пространственные компоненты уравнения движения частицы (3.34), положив $\mu = i$:

$$\frac{\gamma}{c} \frac{dp^i}{dt} = \frac{e}{c} (F^{i0} u^0 - F^{ik} u^k) = \frac{\gamma}{c} \left(eE^i + \frac{e}{c} \epsilon_{ikl} B^l v^k \right),$$

где мы воспользовались тем, что $ds = c dt/\gamma$. Таким образом, мы получили силу \mathbf{F} , действующую на частицу со стороны электромагнитного поля, которая называется *силой Лоренца*:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \quad (3.39)$$

Выражение (3.39) отличается от нерелятивистского выражения тем, что в (3.39) производная по времени берётся от релятивистского импульса \mathbf{p} (3.7). Справа стоит уже известная из нерелятивистской электродинамики сумма сил со стороны электрического поля, $e\mathbf{E}$, и со стороны магнитного, $e[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]/c$.

Уравнение на временную компоненту (3.34) не является независимым, поскольку компоненты 4-импульса связаны ограничением (3.8). Тем не менее, оно обладает физическим смыслом: оно даёт мощность, передаваемую от поля к частице,

$$\frac{dE_{\text{kin}}}{dt} = \left(\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right) = e(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}), \quad (3.40)$$

где E_{kin} — кинетическая энергия (3.10). Энергию частице передаёт только электрическое поле, тогда как магнитное поле не совершает работы над зарядом. Полная энергия частицы (3.31) при этом сохраняется.

ствует сила, равная

$$\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (3.42)$$

см. (7.29). Если тело имеет полный заряд, отличный от нуля, то полная сила, действующая на тело, равна сумме силы Лоренца (3.34) и силы (3.42). Напомним, что уравнения (3.41, 3.42) верны в нерелятивистском пределе.

Оказывается, что элементарные частицы обладают внутренним моментом количества движения, называемом спином $\hbar s$, где \hbar — постоянная Планка. Из принципов квантовой механики следует, что безразмерный вектор спина \mathbf{s} может принимать только полуцелые значения. Кроме того, с такой частицей связан также магнитный момент $\boldsymbol{\mu}$. В системе покоя частицы K' , в которой

механический момент не зависит от точки отсчёта, магнитный момент частицы сонаправлен спину частицы,

$$\boldsymbol{\mu} = g\mu_0\mathbf{s}, \quad \mu_0 = \frac{e\hbar}{2mc}, \quad (3.43)$$

где m - масса частицы, e - её заряд, μ_0 - квантовая единица магнитного диполя для данного типа частиц. Безразмерная константа g называется *g-фактором*. Его значение зависит от типа частиц; отметим, что в рамках некантовой релятивистской механики g -фактор равен единице.

Достроим магнитный момент до 4-х мерного тензора. Хотя в системе покоя частицы 3-вектор магнитного момента пропорционален 3-вектору механического момента, но это не означает, что магнитный момент должен быть 4-х мерным антисимметричным тензором 2-го ранга, пропорциональным механическому моменту. Действительно, компоненты механического момента s^{0i} линейны по положению центра масс, а, значит, зависят от точки отсчёта системы координат. Магнитный момент же есть величина, характеризующая только частицу, и потому не зависящая от точки отсчёта.

Экспериментальные наблюдения подсказывают, что 4-х мерный магнитный момент действительно должен быть антисимметричным тензором второго ранга (поскольку 3-х мерный момент является аксиальным вектором), но таким, что в системе покоя частицы K'

$$\mu^{\mu\nu} = -\mu^{\nu\mu}, \quad K' : \quad \|\mu^{\mu\nu}\| = (\vec{0}, \boldsymbol{\mu}), \quad (3.44)$$

см. обозначения Пункта 6.3.1. Этому тензору можно поставить в соответствие псевдо-4-вектор

$$a^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}u_\nu\mu_{\lambda\rho}, \quad K' : \quad \|a^\mu\| = (0, \boldsymbol{\mu}), \quad (3.45)$$

где u^μ - 4-скорость частицы. Зная 4-скорость, по $\mu^{\mu\nu}$ можно найти a^μ и наоборот. Отметим релятивистские равенства

$$a^\mu u_\mu = 0, \quad a^\mu a_\mu = -\boldsymbol{\mu}^2. \quad (3.46)$$

3.5.1 Уравнение движения спина в однородном поле

Рассмотрим движение заряженной частицы, обладающей спином, в однородном электромагнитном поле. В однородном поле вклад в силу (3.42), действующую на частицу, равен нулю, и поэтому её пространственное движение определяется исключительно силой Лоренца (3.34).

При описании движения спина мы стартуем не с лагранжиана, как это было для пространственного движения частиц и уравнений движения электромагнитного поля. Здесь мы исходим из того, что соответствующий лагранжиан нам не известен. Поэтому нам остаётся другой путь: обобщить уравнение движения спина (3.41) на релятивистский случай. Будем работать в терминах

вектора a^μ (3.45). Из вида уравнения прецессии спина (3.41) в нерелятивистском предельном случае следует, что производная a^μ вдоль мировой линии линейна по этому вектору и по электрическому полю, и может зависеть ещё только от вектора 4-скорости частицы. Поэтому общим видом уравнения на спин является

$$\frac{da^\mu}{ds} = \frac{\mu_0}{\hbar c} (C_1 F^{\mu\nu} a_\nu + C_2 u^\mu F^{\lambda\nu} u_\lambda a_\nu),$$

где $C_{1,2}$ - пока неизвестные безразмерные константы. Для определения первой константы перейдём в сопровождающую систему координат, где $\mathbf{v} = 0$ и потому вклад от C_2 в производную пространственных компонент a^i равен нулю. В силу (3.43)

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = \frac{g\mu_0}{\hbar} [\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}] \quad \Rightarrow \quad C_1 = g.$$

Для определения константы C_2 продифференцируем первое равенство (3.46) вдоль мировой линии, воспользовавшись уравнением движения спина и уравнением движения самой заряженной бесспиновой частицы (3.34):

$$0 = \frac{d(a^\mu u_\mu)}{ds} = \frac{e}{2mc} (g - 2 + C_2) F^{\mu\nu} u_\mu a_\nu$$

В итоге получаем уравнение Баргмана-Мишеля-Телегди

$$\frac{da^\mu}{ds} = \frac{\mu_0}{\hbar c} (g F^{\mu\nu} a_\nu - (g - 2) u^\mu F^{\lambda\nu} u_\lambda a_\nu), \quad \frac{\mu_0}{\hbar c} = \frac{e}{2mc}. \quad (3.47)$$

Уравнение (3.48) непосредственно применимо для заряженных частиц, таких как электрон и протон. У нейтрона полный заряд равен нулю, но он обладает спином и ненулевым магнитным моментом. Уравнение движения его магнитного момента может быть получено из уравнения (3.48) предельным переходом $g\mu_0 = \mu_n = \text{const}$, $g \rightarrow \infty$:

$$\frac{da^\mu}{ds} = \frac{\mu_n}{\hbar c} (F^{\mu\nu} a_\nu - u^\mu F^{\lambda\nu} u_\lambda a_\nu). \quad (3.48)$$

3.5.1.1 Магнитные моменты некоторых частиц

Приведём численные значения магнитных моментов элементарных и некоторых других частиц. Эти значения не могут быть теоретически обоснованы в рамках некантовой релятивистской электродинамики, поэтому здесь их следует воспринимать как справочные.

	спин, s	μ_0	магнитный момент, $sg\mu_0$
электрон	1/2	$-\mu_B$	$\mu_e = -1.00116 \cdot \mu_B$
нейтрон	1/2	-	$\mu_n = -1.91304 \cdot \mu_N$
протон	1/2	μ_N	$\mu_p = 2.79284 \cdot \mu_N$
дейтон	1	$\mu_N/2$	$\mu_d = 0.85735 \cdot \mu_N$

Дейтон есть ядро атома дейтерия, т.е. эта частица состоит из одного протона и одного нейтрона. Знак в правой

колонке означает, сонаправлены или противоположны спин и магнитный момент частицы, а в третьей колонке μ_0 определено в (3.48). *Магнетон Бора* μ_B и *ядерный магнетон* μ_N определяются равенствами

$$\mu_B = \frac{|e|\hbar}{2m_e c} = 9.274 \cdot 10^{-21} \text{ эрг/Гс},$$

$$\mu_N = \frac{|e|\hbar}{2m_p c} = 5.050 \cdot 10^{-24} \text{ эрг/Гс},$$

m_e – масса электрона, m_p – масса протона, а e – элементарный заряд.

3.5.2 Аномальный магнитный момент

Для заряженных частиц со спином $s = 1/2$ выделяют нормальный и аномальный магнитный момент. Нормальный магнитный момент соответствует значению $g = 2$, разность $g - 2$ даёт вклад в аномальный магнитный момент. Например, для электрона аномальный магнитный момент μ'_e равен

$$\mu'_e \equiv \frac{\mu_B}{2}(g - 2) \approx \frac{\alpha}{2\pi} \mu_B \approx 0.00116 \mu_B, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}, \quad (3.49)$$

где малая безразмерная константа α называется *постоянной тонкой структуры*.

Протон, нейтрон и тем более дейтон являются составными частицами. В связи с этим их аномальный

магнитный момент имеет относительную величину порядка единицы.

Если у частицы нет аномального магнитного момента (или он по крайней мере мал, как у электрона), то динамика её спина приобретает дополнительные особенности, поскольку влияние второго слагаемого в правой части уравнения (3.48) на динамику спина становится малым. А именно, пусть частица движется в постоянном магнитном поле. Тогда, если $g = 2$, то угол между вектором скорости \mathbf{v} в лабораторной системе координат и магнитным моментом $\boldsymbol{\mu}$ в сопровождающей системе координат K' остаётся постоянным по мере движения частицы.

Действительно, в случае $g = 2$ уравнения на 4-скорость u^μ и на 4-вектор собственного момента a^μ совпадают. Если есть только магнитное поле, то временная компонента этих 4-векторов не изменяется, а пространственные компоненты прецессируют вокруг направления магнитного поля с одной и той же угловой частотой,

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \gamma \mathbf{v}/c \\ \vec{a} \end{pmatrix} = \frac{e}{mc} \left[\begin{pmatrix} \gamma \mathbf{v}/c \\ \vec{a} \end{pmatrix} \times \mathbf{B} \right], \quad (3.50)$$

причём $\gamma = \text{const}$ в процессе движения. Таким образом, амплитуды векторов \mathbf{v} и \vec{a} и угол между ними не изменяются во времени, а значит и $\boldsymbol{\mu}$ вращается вместе с этими векторами в силу связи (3.45).

Глава 4

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ И ЕГО ВОЗБУЖДЕНИЕ ЗАРЯДАМИ

§4.1. Свойства электромагнитного поля

Итак, в §3.4 было получено, что взаимодействие электромагнитного поля с заряженной частицей определяется тензором электромагнитного поля (3.34)

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

где A_μ – 4-потенциал электромагнитного поля (3.26). Компоненты тензора электромагнитного поля приведены в (3.36), они представляют из себя совокупность компонент электрического и магнитного полей.

В этом параграфе мы установим основные свойства электромагнитного поля, следующие из его определения.

4.1.1 Калибровочная инвариантность

Теория электромагнитного поля отличается от моделей классической механики в том числе и тем, что формулировка уравнений движения поля происходит не в физически измеримых переменных – компонентах электромагнитного поля, – а в терминах 4-потенциала, непосредственно не измеряемого. Более того, каждому фиксированному распределению электромагнитного поля соответствует бесконечно много распределений 4-потенциала. Эти 4-потенциалы переходят друг в друга путём так называемого *калибровочного преобразования*.

Действительно, обратимся к исходному действию (3.27), в котором стоит скалярное произведение 4-потенциала на 4-ток. В силу уравнения непрерывности, т.е. закона сохранения заряда (2.36), одна из компонент 4-тока является зависимой от 3-х остальных. Поэтому и одна из компонент 4-потенциала является с точки зрения информативности лишней.

Калибровочное преобразование 4-потенциала – это такое его изменение, в результате которого действие остаётся прежним при учёте уравнения непрерывности (2.36). Калибровочное преобразование имеет вид

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f, \quad (4.1)$$

где f – произвольная функция координат и времени. В результате такой замены действие действительно не изменится, поскольку в результате интегрирования по частям его изменение δS_{int} приводится к виду

$$\delta S_{\text{int}} = -\frac{1}{c^2} \int d\Omega j^\mu \partial_\mu f = \frac{1}{c^2} \int d\Omega f \partial_\mu j^\mu = 0.$$

(Мы проинтегрировали по частям в предположении, что на бесконечности f убывает, что не ограничивает общности рассуждений). В том, что движение частицы не изменится при замене A^μ (4.1) можно убедиться и по-другому, посчитав при такой замене изменение тензора электромагнитного поля (3.34): оно равно нулю, поскольку результат двойного дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования.

Таким образом, и старое и новое A^μ соответствуют одним и тем же \mathbf{E} и \mathbf{B} . Про тот факт, что уравнения движения инвариантны по отношению к замене (4.1), говорят как о *калибровочной инвариантности*.

4.1.1.1 Калибровки частного вида

Не смотря на то, что в свете калибровочной инвариантности отдельные компоненты 4-потенциала не имеют самостоятельного физического смысла, по соображениям математического удобства часто работают в калибровках определённого вида.

Наиболее известной калибровкой является *калибровка Лоренца*, в которой

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (4.2)$$

Эта калибровка соответствует уравнению непрерывности для 4-тока (2.36) и потому удобна для нахождения поля по заданному току. Условие калибровки Лоренца (4.2) имеет релятивистски инвариантный вид, поэтому если в какой-то системе координат оно выполнено, то оно выполнено во всех системах координат. Это условие калибровки не фиксирует единственным образом 4-потенциал: если функция f в (4.1) является гармонической функцией, то новый 4-потенциал также бездивергентен,

$$g^{\mu\nu} \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu f) = \partial_\mu A^\mu = 0, \quad \text{if } \square f = 0. \quad (4.3)$$

Используется также другая калибровка, называемая *кулоновой калибровкой* (*Coulomb gauge*), задаваемая условием

$$\text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (4.4)$$

Если используется эта калибровка, то уравнение на скалярный потенциал φ воспроизводит статическое уравнение Кулона на потенциал электрического поля. Кулонова калибровка релятивистски неинвариантна: если она

имеет место в одной системе координат, то в общем случае в другой системе координат условие (4.4) не будет выполнено.

4.1.2 Преобразование Лоренца для компонент электромагнитного поля

Исследуем, как преобразуются компоненты электромагнитного поля при переходе из одной системы координат в другую. На этот вопрос относительно легко ответить в терминах 4-потенциала A^μ , потому что он как 4-вектор преобразуется по закону типа (2.31). Тем не менее, интересней ответить на вопрос о преобразовании непосредственно в терминах электрического \mathbf{E} и магнитного \mathbf{B} полей, поскольку именно они определяют силу воздействия на частицу со стороны поля.

Поскольку электрическое и магнитное поля составляют вместе тензор электромагнитного поля, то надо исходить из закона преобразования тензора второго ранга:

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda'^\mu_\lambda \Lambda'^\nu_\sigma F^{\lambda\sigma}. \quad (4.5)$$

В качестве преобразования выберем лоренцевский буст (2.11), что упростит вычисления, но не ограничит физической общности результата. В матричном виде уравнение (4.5) можно переписать в виде

$$\|F'^{\mu\nu}\| = \hat{\Lambda} \begin{pmatrix} \hat{f}_{11} & \hat{f}_{12} \\ -\hat{f}_{12}^T & \hat{f}_{22} \end{pmatrix} \hat{\Lambda}^T,$$

где мы разбили матрицу тензора электромагнитного поля F на блоки 2×2 (их матричные элементы легко найти из (3.36)). Аналогичное разбиение матрицы преобразования $\hat{\Lambda}'$ приведено в (2.11), откуда в частности видно, что эта матрица симметричная, $\hat{\Lambda}'^T = \hat{\Lambda}'$. Непосредственной проверкой легко убедиться, что $\hat{\lambda} \hat{f}_{11} \hat{\lambda} = \hat{f}_{11}$, поскольку $\hat{f}_{11}^T = -\hat{f}_{11}$. В результате получаем, что при преобразовании (4.5) матрицы тензора электромагнитного поля изменяется только недиагональный блочный элемент \hat{f}_{12} ,

$$\hat{f}'_{12} = \hat{\lambda} \hat{f}_{12}.$$

Воспользовавшись теперь явным видом тензора электромагнитного поля (3.36), заключаем, что продольные компоненты (по отношению к скорости взаимного движения систем отсчёта, т.е. в нашем случае x -компоненты) обоих полей не изменяются, а изменяются только поперечные компоненты (те y, z -компоненты). Для произвольного направления скорости относительного движения систем координат закон преобразования можно выписать в следующей форме:

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}_{\perp}]), \quad (4.6)$$

$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}, \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}_{\perp}]).$$

4.1.3 Первая пара уравнений Максвелла

Поскольку компоненты \mathbf{E} и \mathbf{B} являются производными от компонент 4-потенциала A^μ , то они не полностью независимы друг от друга и между ними есть связи.

Действительно, рассмотрим псевдо-тензор $\tilde{F}^{\mu\nu}$, дуальный тензору электромагнитного поля $F^{\lambda\sigma}$, см. Пункт 6.3.1.1:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \partial_\lambda A_\sigma. \quad (4.7)$$

Матричными компонентами $\tilde{F}^{\mu\nu}$ являются те же компоненты \mathbf{E} и \mathbf{B} , но поменянные местами с изменением знака у \mathbf{E} : в обозначениях (6.35)

$$\|\tilde{F}^{\mu\nu}\| = (-\mathbf{B}, \mathbf{E}).$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что 4-дивергенция тензора $\tilde{F}^{\mu\nu}$ равна нулю,

$$\begin{aligned} \partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} &= \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \partial_\nu \partial_\lambda A_\sigma = 0, & \Leftrightarrow & \\ \Leftrightarrow & \partial_\nu F_{\mu\lambda} + \partial_\lambda F_{\nu\mu} + \partial_\mu F_{\lambda\nu} = 0, & (4.8) \end{aligned}$$

поскольку результат двойного дифференцирования не зависит от его порядка. Уравнение (4.8) содержит в себе 4 скалярных уравнения, которые в трёхмерном виде могут быть переписаны как

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (4.9)$$

Эти уравнения составляют *первую пару уравнений Максвелла*.

Уравнения Максвелла (4.9) могут быть получены и непосредственно из трёхмерных определений (5.38).

4.1.4 Релятивистские инварианты электромагнитного поля

Из компонент электромагнитного поля можно составить комбинации, сохраняющие своё значение в любой системе координат. Эти комбинации называются *инвариантами электромагнитного поля*, этих инвариантов два:

$$\frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2, \quad -\frac{1}{4} \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}). \quad (4.10)$$

Обе этих величины являются скалярами с точки зрения тензорного исчисления, то есть являются релятивистскими инвариантами. Точнее, вторая величина является псевдо-скаляром, поскольку при операции пространственной инверсии она меняет знак.

Других инвариантов электромагнитного поля не существует; если пытаться составить релятивистски инвариантные величины более высокой степени по F , то будет получаться либо ноль (если степень нечётна), либо полиномиальная комбинация инвариантов (4.10).

§4.2. Уравнения движения электромагнитного поля

Для точечной частицы каноническими переменными (степенями свободы) при лагранжевом описании являются три пространственных координаты тела.

Поле описывается другим способом. К каждой точке пространства прикреплено некоторое фиксированное число степеней свободы, которые и являются в этом случае каноническими переменными в лагранжевом описании. Координаты же в этом случае служат для перечисления канонических переменных. В случае электромагнитного поля обобщёнными координатами являются компоненты 4-потенциала A^μ .

4.2.1 Действие свободного электромагнитного поля

Действие для свободного электромагнитного поля должно быть квадратично по производным 4-потенциала, обладать калибровочной инвариантностью (не изменяться при замене вида (4.1)) и быть инвариантным по отношению к любому преобразованию Лоренца, в том числе и к операции инверсии. Из Пункта 4.1.4 следует, что такой инвариант существует и единственен; таким образом, действие

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c} \int d\Omega F^{\nu\mu} F_{\nu\mu} = \frac{1}{c} \int d\Omega \mathcal{L}_f, \quad (4.11)$$

$$\mathcal{L}_f = -\frac{1}{16\pi} F^{\nu\mu} F_{\nu\mu}.$$

Коэффициент $1/c$ выбран из соотношения размерности, а численный коэффициент $1/(16\pi)$ добавлен для того, чтобы в итоге получились уравнения Максвелла с общепринятыми коэффициентами. Величину \mathcal{L}_f можно назвать объёмной плотностью лагранжиана. Используя (4.10) получаем, что лагранжиан свободного поля есть

$$L_f = \int d^3\mathbf{r} \mathcal{L}_f = \frac{1}{8\pi} \int d^3\mathbf{r} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2). \quad (4.12)$$

В этом параграфе мы изучаем движение поля при заданном движении электрических зарядов. Действие, которое описывает движения поля, складывается из двух частей – действия свободного электромагнитного поля (4.11) и части действия (3.27), отвечающего за взаимодействие поля и частиц:

$$S = S_f + S_{\text{int}} \quad (4.13)$$

Проведём вариацию действия S , положив $A_\mu \rightarrow A_\mu + \delta A_\mu$ и предполагая вариацию поля δA_μ убывающей на бесконечности:

$$\begin{aligned} \delta S &= -\frac{1}{4\pi c} \int d\Omega F^{\nu\mu} \partial_\nu \delta A_\mu - \frac{1}{c^2} \int d\Omega j^\mu \delta A_\mu = \\ &= \frac{1}{4\pi c} \int d\Omega \left(\partial_\nu F^{\nu\mu} - \frac{4\pi}{c} j^\mu \right) \delta A_\mu. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Преобразуя первое слагаемое, мы сначала воспользовались тем, что выражения для действия представляется из себя квадратичную форму, потом антисимметричностью тензора электромагнитного поля (3.35), а затем произвели интегрирование по частям. В результате получаем, что уравнения движения поля являются

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu. \quad (4.15)$$

4.2.2 Вторая пара уравнений Максвелла

Перепишем уравнения (4.15) в трёх-мерной форме. Для этого, как и при получении первой пары уравнений Максвелла, распишем определение тензора электромагнитного поля (3.34) для различных его компонент, см. (3.36):

$$\begin{aligned} \partial_i F^{i0} &= \partial_i E^i = \frac{4\pi}{c} j^0, \quad (\mu = 0, \nu = i), \\ \partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} &= -\partial_0 E^i - \epsilon_{jik} \partial_j B^k = \frac{4\pi}{c} j^i, \\ &(\mu = i, \nu = 0, j). \end{aligned}$$

Остаётся перевести 4-ток в трёхмерные обозначения согласно (2.39). В результате в векторных обозначениях эти равенства переписываются в виде

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (4.16)$$

Уравнения (4.16) составляют *вторую пару уравнений Максвелла*. Напомним, что первая пара уравнений Максвелла выписана в (4.9).

4.2.3 Поле, создающиеся токами: запаздывающие потенциалы

Если движение зарядов полностью определено, то есть известен 4-ток $j^\mu(x)$, то вторая пара уравнений Максвелла (4.15) (или (4.16)) позволяет найти распределение поля. В этом пункте мы рассмотрим один из математически наиболее компактных способов нахождения поля по заданному движению зарядов.

Перепишем уравнение (4.15) в терминах 4-потенциала:

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\mu.$$

Результат решения поставленной нами задачи с точки зрения физических величин (то есть полей \mathbf{E} и \mathbf{B}) не зависит от того, какая именно калибровка будет выбрана. С другой стороны, выписанное уравнение приобретает более простой вид, если калибровка лоренцева, см. (4.2):

в таком случае второе слагаемое в левой части уравнения исчезает, и мы приходим к уравнению

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu, \quad \square \equiv \partial_\nu \partial^\nu = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta, \quad (4.17)$$

где Δ – оператор Лапласа в трёх-мерном координатном пространстве. Оператор \square принято называть *оператором д'Аламбера*.

Таким образом, в результате использования калибровки Лоренца вторая пара уравнений Максвелла, записанная в терминах 4-потенциала, распадается на 4 независимых уравнения для каждой компоненты 4-потенциала. При каждом фиксированном μ уравнение (4.17) является *неоднородным волновым уравнением* (если соответствующая компонента тока равна нулю, то такое уравнение называется просто *волновым уравнением*).

4.2.3.1 Функция Грина

Решение неоднородного волнового уравнения удобно записывать через функцию Грина волнового уравнения,

$$G(t, \mathbf{r}) = \frac{\delta(t - r/c)}{r}, \quad (4.18)$$

которая удовлетворяет уравнению

$$\square G(t, \mathbf{r}) = 4\pi \delta(t) \delta^{(3)}(\mathbf{r}) = 4\pi c \delta^{(4)}(x),$$

где $\|x^\mu\| = \{ct, \mathbf{r}\}$. Свойства функции Грина подробно обсуждаются в Пункте 7.1.1. Функция Грина связывает вклад в сигнал в точке \mathbf{r} в момент времени $t > 0$ от заряда, который находился в начале координат в нулевой момент времени. Отметим, что функций Грина, вообще говоря, существует бесконечно много. Мы выбрали вполне определённую – *запаздывающую функцию Грина*, руководствуясь принципом причинности: реакция поля на источник должна наступать не ранее появления этого источника.

Выражение (4.18) можно интерпретировать следующим образом: если в начале координат в нулевой момент времени находился покоящийся источник единичной амплитуды, то в результате от этого источника начнёт распространяться сигнал со световой скоростью в форме сферической волны, так что на расстоянии r от него он будет зафиксирован в момент времени $t = r/c$.

Функцию Грина можно записать также и в ковариантном виде:

$$G(x) = 2c \theta(x^0) \delta(x_\mu x^\mu), \quad (4.19)$$

где $\|x^\mu\| = \{ct, \mathbf{r}\}$, а θ -функция равна единице при положительном аргументе и нулю при отрицательном его значении. Принцип причинности гарантируется как раз присутствием этой функцией в качестве множителя.

4.2.3.2 Запаздывающие потенциалы

Используем результат Пункта 4.2.3.1: 4-потенциал в калибровке Лоренца равен

$$\begin{aligned} A^\mu(t, \mathbf{r}) &= \frac{1}{c^2} \int d\Omega_z G(x - z) j^\mu(z) = \\ &= \frac{1}{c} \int d^3z dt_r G(t - t_r, \mathbf{r} - \mathbf{z}) j^\mu(t_r, \mathbf{z}) = \\ &= \frac{1}{c} \int d^3z \frac{j^\mu(t - |\mathbf{r} - \mathbf{z}|/c, \mathbf{z})}{|\mathbf{r} - \mathbf{z}|}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

где 4-вектора $\|x^\mu\| = \{ct, \mathbf{r}\}$, $\|z^\mu\| = \{ct_r, \mathbf{z}\}$, а элемент 4-объёма $d\Omega_z = c dt_r d^3z$. Первое и второе выражения для 4-потенциала A^μ представляет из себя общее выражение, следующее из уравнения на 4-потенциал (4.17) и определения функции Грина G , см. Пункт 7.1.1.

Последнее выражение для 4-потенциала A^μ получено при использовании конкретного вида функции Грина (4.18). Решение волнового уравнения, записанное в этом виде, называется *запаздывающими потенциалами*. Смысл этого выражения следующий: сигнал в точку \mathbf{r} из точки \mathbf{z} приходит за время $|\mathbf{r} - \mathbf{z}|/c$, необходимое пройти сигналу со световой скоростью. Таким образом, чтобы понять, каково воздействие происходящего в точке \mathbf{z} на точку \mathbf{r} в момент времени t , надо узнать, что было в точке \mathbf{z} , но в более ранний момент времени $t_r = t - |\mathbf{r} - \mathbf{z}|/c$. Сила воздействия падает обратно пропорционально расстоянию между точками, как $1/|\mathbf{r} - \mathbf{z}|$, что соответствует частному случаю – закону Кулона.

В Пункте 5.1.1 продемонстрировано, как из общего выражения для запаздывающих потенциалов (4.20) выводится закон Кулона для распределения электрического поля статических зарядов. В Пункте 5.2.1 получен закон Био-Савара-Лапласа для распределения магнитного поля, индуцированного постоянными токами.

§4.3. Тензор энергии-импульса

В §3.3 было показано, что законы сохранения энергии и импульса полной системы можно записать в виде локальных законов сохранения. Каждый локальный закон сохранения представляет из себя равенство нулю 4-дивергенции некоторого 4-столбца, нулевая компонента которого является объёмной плотностью сохраняющейся величины, а пространственные – плотностью потока этой величины. В случае энергии и импульса соответствующие столбцы образуют тензор второго ранга – тензор энергии-импульса $T^{\mu\nu}$.

В этом параграфе мы обобщим результаты, полученные в §3.3, на случай взаимодействующей системы заряженных массивных частиц и электромагнитного поля.

4.3.1 Нётеровский метод построения тензора энергии-импульса

4.3.2 Вариация действия

При построении вариации поля мы будем придерживаться логики, описанной в Пункте 1.3.1.1. Такой выбор вариации приведёт к тому, что построенный нами тензор энергии-импульса окажется симметричным.

Вариацию поля $A_\mu \rightarrow A_\mu + \delta A_\mu$ выберем в виде

$$\delta A_\mu = -\delta x^\nu \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu \delta x^\nu A_\nu = -\delta x^\nu F_{\nu\mu} - \partial_\mu (\delta x^\nu A_\nu), \quad (4.21)$$

где параметр вариации $\delta x^\nu = \delta x^\nu(x)$. Такой вид вариации можно обосновать следующим образом. Представим, что мы варьруем не непосредственно само поле, а координатную сетку, делая её слабо криволинейной (в Пункте 1.3.1.1 деформировалась только временная ось). Сетка при своей деформации увлекает за собой поле. Новые декартовы координаты x'^ν выражаются через старые x^ν (теперь уже слабо криволинейные) как

$$x'^\nu = x^\nu - \delta x^\nu,$$

где δx^ν – вектор смещения каждой точки старой сетки. Для того, чтобы разобраться с тем, как при этом изменяется A_μ , положим, что это векторное поле есть градиент некоторого скалярного поля ϕ , $A_\mu = \partial_\mu \phi$. Тогда

$$\delta \phi = \phi(x') - \phi(x) = -\delta x^\nu \partial'_\nu \phi,$$

$$\delta A_\mu = \partial'_\mu \delta \phi = -\partial'_\mu (\delta x^\nu \partial'_\nu \phi).$$

Убирая штрихи, мы приходим к (4.21).

Соответственно вышеизложенной логике, мировые линии частиц также увлекаются деформированной координатной сеткой. Поэтому вариацию траекторий частиц выберем в виде

$$x^\nu(s) \rightarrow x^\nu(s) + \delta x^\nu(x(s)), \quad (4.22)$$

то есть вариация траектории $\delta x^\mu(s)$ есть значение параметра вариации $\delta x^\mu(x)$ в точке $x = x(s)$.

Перейдём к варьированию действия

$$S = S_m + S_{\text{int}} + S_f$$

всей системы. При вариации действия свободного поля (4.11) следует учесть, что второе слагаемое в последнем выражении для вариации 4-потенциала (4.21) представляет градиент, и потому является калибровочным преобразованием и не изменяет действие. Таким образом,

$$\begin{aligned} \delta S_f &= -\frac{1}{4\pi c} \int d\Omega F^{\tau\mu} (\partial_\tau \delta A_\mu - \partial_\tau (\delta x^\nu F_{\nu\mu})) = \\ &= \frac{1}{4\pi c} \int d\Omega \delta x^\nu (\partial_\tau (F_{\nu\mu} F^{\tau\mu}) - F^{\tau\mu} \partial_\tau F_{\nu\mu}) = \\ &= \frac{1}{c} \int d\Omega \delta x^\nu \partial_\tau \left(-\frac{F^{\tau\mu} F_{\nu\mu}}{4\pi} - \delta_\nu^t \mathcal{L}_f \right). \end{aligned} \quad (4.23)$$

В процессе выкладок мы произвели интегрирование по частям, предположив, что вариация обращается в нуль на бесконечности. Затем мы воспользовались тем, что тензор электромагнитного поля антисимметричен, см. (3.35), а \mathcal{L}_f есть плотность лагранжиана электромагнитного поля (4.11)

Относительно не сложно показать, что вариация части действия S_{int} (3.27) действительно равна нулю. Для этого надо посчитать два вклада в вариацию: от вариации поля, и от вариации траекторий частиц. Последняя найдена в (3.33), а первую можно найти, проделав выкладки аналогичные проделанным в (4.23). В результате два вклада в точности сокращают друг друга.

Вариация части действия свободных частиц найдена в (3.16), поскольку мы выбрали ту же самую вариацию координаты (4.22).

В результате получаем, что вариация полного действия всей системы равна

$$\delta S = \frac{1}{c} \int d\Omega \delta x_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu}, \quad T^{\mu\nu} = T^{(m)\mu\nu} + T^{(f)\mu\nu}, \quad (4.24)$$

то есть имеют место законы сохранения энергии и импульса,

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (4.25)$$

Тензор энергии-импульса массивных частиц $T^{(m)\mu\nu}$ был вычислен в §3.3, см. (3.16,3.23). Согласно (4.23), тензор энергии-импульса электромагнитного поля равен

$$T^{(f)\mu\nu} = g^{\mu\nu} \frac{F^{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma}}{16\pi} - \frac{F^{\mu\lambda} F^\nu{}_\lambda}{4\pi}. \quad (4.26)$$

Это выражение симметрично по индексам μ, ν , поэтому и весь полученный тензор энергии-импульса симметричен,

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}. \quad (4.27)$$

Отметим, что полный тензор энергии-импульса является арифметической суммой тензоров энергии-импульса двух взаимодействующих подсистем – заряженных частиц и электромагнитного поля. Тогда как в действии присутствует член, ответственный за взаимодействие этих подсистем, $T^{\mu\nu}$ формально остался бы таким же, если бы эти две подсистемы стали не взаимодействующими. Это свойство является частным свойством классической релятивистской электродинамики, в квантовой теории оно исчезает.

4.3.2.1 Симметрия тензора энергии-импульса

Законы сохранения энергии и импульса останутся в силе, если к тензору энергии-импульса добавить величину, не изменяющую нулевую 4-дивергенцию (4.26). Действительно, замена

$$T^{\mu\nu} \rightarrow T^{\mu\nu} + \partial_\lambda \psi^{\lambda\mu\nu}, \quad \psi^{\lambda\mu\nu} = -\psi^{\mu\lambda\nu} \quad (4.28)$$

при произвольном ψ не нарушает (4.25) ввиду потребованной антисимметричности ψ по первым двум индексам. Полный интеграл от величин $T^{0\nu}$ по-прежнему представляет из себя полный 4-импульс P^ν истемы:

$$\int d^3\mathbf{r} (T^{0\nu} + \partial_i \psi^{i0\nu}) = \int d^3\mathbf{r} T^{0\nu} = cP^\nu.$$

С другой стороны, такая замена нарушает симметричность тензора энергии-импульса (4.27).

В результате выкладок нами был получен тензор энергии-импульса в симметричном виде не случайно, а по причине специального выбора вида вариаций (4.21, 4.22). Например, в Ландау и Лифшиц, 1988, §§32, 33 была выбрана вариация поля без второго слагаемого (4.21). Поэтому и тензор энергии-импульса электромагнитного поля в результате вариации действия получился несимметричным, см. там же, стр. 114, после чего ещё потребовалось найти правильное ψ для его приведения к симметричному виду.

Симметричный вид тензора энергии-импульса удобен тем, что он позволяет интерпретировать матричные элементы максвелловского тензора напряжений $\hat{\sigma}$ как силы, приложенные к сторонам бесконечно малого кубического элемента объёма пространства. Только в случае симметрии тензора энергии-импульса такой бесконечно малый объём не будет приобретать бесконечно большого углового ускорения. Математически это означает возможность определения тензора момента импульса через тензор энергии-импульса, что проделано в § 4.4.

Отметим также, что не существует нетривиального преобразования (4.28), переводящего симметричный

тензор энергии-импульса снова в симметричный, но отличный от исходного. Иными словами, требование симметричности тензора энергии-импульса полностью фиксирует этот тензор. Доказательство этого утверждения может быть проведено прямолинейным образом: из требования

$$\psi^{\lambda\mu\nu} = \psi^{\lambda\nu\mu} = -\psi^{\mu\lambda\nu}$$

следует, что все компоненты ψ равны нулю.

4.3.3 Матричная структура тензора энергии-импульса электромагнитного поля

Напомним, что общую структуру тензора энергии-импульса мы обсуждали в Пункте 3.3.1, а сама она приведена в (3.23). В §3.3 мы исследовали матричные элементы части тензора энергии-импульса $T^{(m)\mu\nu}$, связанного с массивными частицами. Поэтому сейчас нам остаётся исследовать часть $T^{(f)\mu\nu}$, связанную с электромагнитным полем.

Из (4.26) вытекает, что объёмная плотность электромагнитной энергии

$$T^{(f)00} = \varepsilon = \frac{E^2 + B^2}{8\pi} \quad (4.29)$$

Плотность потока энергии \mathbf{S} равна

$$T^{(f)i0} = S^i/c, \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]. \quad (4.30)$$

Выражение для потока энергии (4.30) называют *вектором Умова-Пойнтинга (Poynting-vector)*. Из симметрии тензора энергии-импульса следует (см. рассуждения Пункта 3.3.1), что этому же вектору равна объёмная плотность импульса, $\vec{p} = \mathbf{S}/c^2$, связанного с электромагнитным полем.

Тензор напряжений равен

$$\sigma^{ik} = \frac{1}{4\pi} \left(E^i E^k + B^i B^k - \frac{E^2 + B^2}{2} \delta^{ik} \right) \quad (4.31)$$

Из тензора энергии-импульса можно составить релятивистский инвариант путём операции свёртки. При этом след от электромагнитной части энергии-импульса оказывается равным нулю, см. (4.29, 4.31), так что мы получаем

$$T^\mu_\mu = T^{(m)\mu}_\mu = \frac{c^2 \rho_m}{\gamma}. \quad (4.32)$$

Мы уже получали этот тип инвариантов другими рассуждениями, см. (2.42).

§4.4. Момент импульса

Момент импульса (*angular momentum*) в классической механике для одной точечной частицы определяется как векторное произведение, $\mathbf{L} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]$. Его сохранение выражает тот факт, что законы движения изотропны.

Для того, чтобы расширить определение момента импульса на 4-х мерное пространство-время, сделаем несколько наблюдений. Во-первых, аксиальному вектору момента импульса \mathbf{L} соответствует тензор второго ранга L^{ik} . Таким образом, моменту импульса должен соответствовать тензор второго ранга $L^{\mu\nu}$. Во-вторых, как мы установили в случае с полным зарядом Q и полным 4-импульсом P^μ , 4-токи этих величин являются тензорами рангов на один больше, то есть ранга 1 и 2 соответственно. Поэтому в случае с полным моментом импульса $L^{\mu\nu}$ его поток является тензором ранга 3. Наконец, в-третьих, тензор момента импульса должен быть антисимметричным, поскольку в трёхмерном пространстве имеет место аналогичное свойство $L^{ik} = -L^{ki}$.

Покажем, что определением тензора момента импульса является

$$L^{\mu\nu} = \int d^3\mathbf{r} (x^\mu T^{\nu 0} - x^\nu T^{\mu 0}) = \int d^3\mathbf{r} S^{0\mu\nu},$$

$$L^{\mu\nu} = -L^{\nu\mu}, \quad S^{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{c} (x^\mu T^{\nu\lambda} - x^\nu T^{\mu\lambda}), \quad (4.33)$$

где $S^{\lambda\mu\nu}$ – поток момента импульса. Связь между потоком момента импульса $S^{\lambda\mu\nu}$ и его интегральным значением $L^{\mu\nu}$ аналогична связи (3.20) между потоком импульса $T^{\mu\nu}$ и его полным значением P^μ . Поток момента импульса по своей природе определён неоднозначно, поскольку его определение зависит от выбора начала системы координат.

Используя равенство нулю 4-дивергенции тензора энергии-импульса (3.17) и его симметричность (3.16), можно убедиться, что 4-дивергенция потока момента импульса равна нулю,

$$\partial_\lambda S^{\lambda\mu\nu} = 0.$$

Как из (3.17) следует закон сохранения импульса (3.20), так из этого равенства следует закон сохранения момента импульса $L^{\mu\nu}$ (4.33). Отметим, что без свойства симметричности тензора энергии-импульса определение

тензора момента импульса теряет свой смысл. Таким образом, хотя тензор энергии-импульса можно записать и в несимметричной форме, см. Пункт 4.3.2.1, но симметричная форма имеет то преимущество, что она даёт возможность определить момент импульса.

Поскольку тензор четырёх-мерного момента импульса антисимметричен (является би-вектором), то его компоненты образуют два трёхмерных вектора, один радиальный, и один аксиальный,

$$\|L^{\mu\nu}\| = \left(\frac{E}{c} (\mathbf{V}t - \bar{\mathbf{R}}), \mathbf{L} \right) \quad (4.34)$$

см. определения Пункта 6.3.1 для антисимметричного тензора второго ранга. Вектор \mathbf{L} есть ранее введённый трёхмерный вектор момента импульса,

$$L^{ik} = \int d^3\mathbf{r} (x^i p^k - x^k p^i) = \epsilon_{ikm} L^m, \quad (4.35)$$

где \vec{p} – пространственная плотность 3-х мерного импульса. Пространственно-временными компонентами 4-тензора момента импульса являются

$$L^{i0} = t \int d^3\mathbf{r} p^i - \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{r} x^i \varepsilon \equiv \frac{E}{c} (V^i t - \bar{R}^i),$$

где ε – пространственная плотность энергии. Мы определили скорость \mathbf{V} движения центра масс и $\bar{\mathbf{R}}$ – текущее положение центра масс:

$$\mathbf{V} = \frac{c^2 \mathbf{P}}{E}, \quad \bar{\mathbf{R}} = \frac{1}{E} \int d^3\mathbf{r} \mathbf{r} \varepsilon, \quad (4.36)$$

где E и \mathbf{P} – полная энергия и импульс системы, определённые согласно (3.20). Определение скорости центра масс \mathbf{V} соответствует частному случаю одной частицы (3.7). Положение центра масс $\bar{\mathbf{R}}$ определяется через плотность энергии, что можно интерпретировать как следствие эквивалентности массы и энергии, см. например (3.7). Поскольку сохраняются во времени в том числе компоненты L^{i0} четырёх-мерного момента импульса, то центр масс движется со скоростью \mathbf{V} ,

$$\frac{d\bar{\mathbf{R}}}{dt} = \mathbf{V}. \quad (4.37)$$

§4.5. Распространение электромагнитных волн

Рассмотрим динамику электромагнитного поля в пустоте, то есть в области пространства, где нет зарядов. В этой области динамика поля описывается однородным волновым уравнением, см. (4.17). Этому же уравнению подчиняется и само электромагнитное поле. Действительно, из уравнений Максвелла (4.9,4.16) получаем, что

$$\square \mathbf{E} = \left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta \right) \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad (4.38)$$

и такие же уравнения справедливы для магнитного поля \mathbf{B} .

4.5.1 Плоская электромагнитная волна

Предположим, что все компоненты поля зависят только от одной координаты, пусть это будет координата Oz . Тогда волновое уравнение упростится до вида

$$\left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \partial_z^2 \right) \mathbf{E} = \left(\frac{1}{c} \partial_t - \partial_z \right) \left(\frac{1}{c} \partial_t + \partial_z \right) \mathbf{E} = 0, \\ \partial_z E^z = 0. \quad (4.39)$$

Для того, чтобы волновое уравнение удовлетворялось, электрическое поле должно зависеть либо только от комбинации $z - ct$, либо только от комбинации $z + ct$. Таким образом, поле \mathbf{E} может быть представлено в виде суммы волн, бегущих со скоростью c в положительном и отрицательном направлении оси Oz ,

$$\mathbf{E}(t, z) = \mathbf{E}_+(t - z/c) + \mathbf{E}_-(t + z/c). \quad (4.40)$$

Например, рассмотрим вариант, когда есть только вклад \mathbf{E}_+ от бегущей в положительном направлении волны (будем опускать индекс '+' для краткости). В силу линейности уравнений Максвелла, магнитное поле \mathbf{B} волны зависит от времени и координат через эту же комбинацию $t - z/c$. Бездивергентность обоих полей означает, что их z -компоненты равны нулю. Таким образом, электромагнитная волна является полностью поперечной. Из уравнений Максвелла следует, что в каждой точке электрическое и магнитное поля плоской волны связаны между собой соотношениями

$$\mathbf{B} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}], \quad \mathbf{E} = -[\mathbf{n} \times \mathbf{B}], \quad (4.41)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор, указывающий направление распространения волны (при нашем выборе системы координат z -направление).

Вычислим тензор энергии-импульса, связанный с бегущей волной. Из (4.29,4.30), а также (4.41) следует, что вектор Пойнтинга имеет ненулевой только z -компоненту, которая оказывается равной $c\varepsilon$, где ε – объёмная плотность энергии. Тензор напряжений (4.31)

имеет ранг равный единице, имея ненулевым только σ^{zz} -элемент. Собирая всё вместе, имеем

$$\varepsilon = \frac{\mathbf{E}^2}{4\pi}, \quad \mathbf{S} = c\varepsilon \mathbf{n}, \quad \sigma^{ik} = -\varepsilon n^i n^k. \quad (4.42)$$

Полный тензор энергии-импульса плоской монохроматической волны может быть записан также в виде

$$T^{\mu\nu} = \varepsilon n^\mu n^\nu, \quad \|n^\mu\| = \{1, \mathbf{n}\}. \quad (4.43)$$

Подчеркнём, что n^μ не является 4-вектором.

4.5.2 Плоская монохроматическая электромагнитная волна

Плоская волна называется монохроматической, если она зависит от координаты и времени по гармоническому закону

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = 2 \operatorname{Re} \tilde{\mathbf{E}}(t, \mathbf{r}), \quad (4.44) \\ \tilde{\mathbf{E}}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp(-ik_\mu x^\mu),$$

где $\tilde{\mathbf{E}}$ – комплексное электрическое поле, \mathbf{E}_0 – комплексная амплитуда электрического поля волны, ω – циклическая (угловая) частота волны (angular frequency), \mathbf{k} – волновой вектор (wavenumber), Re – операция взятия действительной части, а $\|x^\mu\| = \{ct, \mathbf{r}\}$. Поскольку уравнения Максвелла линейны, то их возможно записывать в терминах комплексных полей, а уже после вычислений переходить к физическим действительным полям. Мы также ввели четырёх-мерный волновой вектор

$$\|k^\mu\| = \left\{ \frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right\}, \quad \mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}, \quad k^\mu k_\mu = \omega^2 c^2 - \mathbf{k}^2 = 0. \quad (4.45)$$

Последние два равенства равносильны и следуют из волнового уравнения. Они означают, что электромагнитная волна распространяется со скоростью света.

Покажем, что k^μ действительно является 4-вектором. Преобразование Лоренца линейно и вещественно, поэтому преобразование Лоренца электромагнитного поля (4.6) можно проводить с комплексным полем $\tilde{\mathbf{E}}$, введённым в (4.44), а уже потом выделять действительную часть. При таком подходе ясно, что фазовый множитель $\exp(-ik^\mu x_\mu)$ в электрическом поле является релятивистским инвариантом (величину $-k^\mu x_\mu$ называют фазой волны). Поскольку x^μ является 4-вектором, то и совокупность 4-х параметров k^μ также должна являться 4-вектором.

Периоды колебаний монохроматической волны в пространстве и времени равны

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}|}, \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi}, \quad (4.46)$$

и называются *длиной волны* и *частотой волны* соответственно. Видимый свет является электромагнитной волной с определённым диапазоном длин волн, от 390 нм (фиолетовый) до 770 нм (красный). Таким образом, свет распространяется с ранее введённой скоростью c , которую потому и называют скоростью света.

4.5.2.1 Поляризации плоской монохроматической волны

Посмотрим, сколько существует линейно независимых плоских электромагнитных волн с фиксированным волновым вектором \mathbf{k} . Из связи электрического и магнитного полей волны следует, что оба поля ортогональны направлению распространения волны $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$. В результате остаётся только два линейно независимых направления для электрического поля \mathbf{E} . Таким образом, для электромагнитной волны существуют *две независимые поляризации*.

Число поляризаций можно посчитать и рассуждая в терминах 4-потенциала A_μ , что может представлять некоторые преимущества. Если мы работаем в калибровке Лоренца (4.2), то 4 компоненты 4-потенциала параметризуются тремя независимыми функциями. Если мы имеем дело с плоской волной, то это означает, что вектор-потенциал имеет вид

$$A_\mu = 2 \operatorname{Re} (\alpha_\mu \exp(-ik_\nu x^\nu)), \quad \|k^\mu\| = k(1, \mathbf{n}).$$

Однако существует калибровочное преобразование (4.3) не изменяет условия калибровки Лоренца; в нашем случае в качестве потенциала такого преобразования должна быть взята функция $f = \operatorname{Re}(-i\tilde{f} \exp(-ik_\nu x^\nu))$ с постоянным \tilde{f} . В терминах комплексного вектора α_μ это калибровочное преобразование и условие калибровки Лоренца выглядят как

$$\alpha_\mu \rightarrow \alpha_\mu + \tilde{f} k_\mu, \quad \alpha_\mu k^\mu = 0.$$

Калибровочным преобразованием мы можем добиться того, что нулевая компонента 4-потенциала обратится в нуль, $\alpha_0 = 0$; для этого надо выбрать $\tilde{f} = -\alpha_0/k$. Вместе с этим обратится в нуль скалярное произведение векторных частей волнового вектора и комплексной амплитуды 4-потенциала, $(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{n}) = 0$.

Пусть направлением распространения волны является Oz , так что $\|k^\mu\| = (k, 0, 0, k)$. Тогда ненулевыми остаются только 2 компоненты A_β , $\beta = \{x, y\}$, которые можно представить в виде суммы *двух круговых поляризаций*

$$\|A_\beta\| = \alpha_+ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + \alpha_- \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

4.5.3 Эффект Доплера и абберация света

Определим, как изменяются направление распространения и частота плоской монохроматической электромагнитной волны при смене системы координат.

Пусть в системе K волновой вектор имеет компоненты $\mathbf{k} = \{k \cos \theta, k \sin \theta, 0\}$, а в системе K' , движущейся относительно системы K со скоростью v вдоль оси Ox , компоненты волнового вектора равны $\mathbf{k}' = \{k' \cos \theta', k' \sin \theta', 0\}$. Связь между введёнными параметрами задаётся через лоренцевский буст, см. Пункт 2.2.4: в терминах 4-волнового вектора k^μ

$$\begin{pmatrix} k' \\ k' \cos \theta' \\ k' \sin \theta' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma k (1 - \beta \cos \theta) \\ \gamma k (\cos \theta - \beta) \\ k \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (4.48)$$

Отметим, что поскольку $k^\mu k_\mu = 0$, 4-импульс безмассовой частицы (см. Пункт 3.1.3) преобразуется по тем же законам (4.48), что и волновой 4-вектор k^μ .

4.5.3.1 Абберация света

Из (4.48) следует, что в новой системе отсчёта K' направление распространения плоской монохроматической волны отличается от того, которое было в системе K . Поделив первую компоненту на нулевую, а потом вторую на нулевую, получим, что

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta}, \quad \sin \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)}. \quad (4.49)$$

Обратный закон преобразования получается из (4.49) перемены местами штриха и заменой $v \rightarrow -v$.

Эффект изменения направления распространения электромагнитной волны при переходе в другую систему координат называется *абберацией* (*aberration of light*).

4.5.3.2 Эффект Доплера

Помимо направления, при переходе в другую систему координат изменяется также и частота волны. Нулевая компонента в уравнении (4.48) есть

$$\omega' = \gamma \omega (1 - \beta \cos \theta). \quad (4.50)$$

Эффект изменения частоты волны (в данном случае электромагнитной) при смене системы координат называется *эффектом Доплера* (*Doppler effect*).

§4.6. Поле движущегося точечного заряда

Запаздывающие потенциалы (4.20) имеют дело с непрерывной средой. Часто бывает удобным оперировать в терминах точечных зарядов. Выражения для 4-потенциала при известных траекториях движения заряженных частиц в калибровке Лоренца называются *потенциалами Лиенара-Вихерта (Liénard-Wiechert potential)*.

4.6.1 Потенциалы Лиенара-Вихерта

Для простоты будем рассматривать одну частицу и обозначим её траекторию (мировую линию) $z(s)$. В трёхмерном виде траектория частицы задаётся законом $\mathbf{z}(t)$, а её скорость равна $\mathbf{v}(t)$. Поскольку частица движется со скоростью, меньшей скорости света, то сигнал в момент и точку наблюдения $\|x^\mu\| = \{ct, \mathbf{r}\}$ доходит только от одного участка траектории частицы. Иными словами, уравнение

$$t = t_r + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{z}(t_r)|}{c}, \quad T = t - t_r. \quad (4.51)$$

имеет ровно одно решение относительно момента t_r . Мы ввели время распространения сигнала T . Пусть моменту испускания сигнала t_r соответствует положение на мировой линии $s = s_r$. Определим 4-вектор R^μ , соединяющий точку испускания сигнала с точкой его приёма:

$$\|R^\mu(x)\| = \|x^\mu - z^\mu(s_r)\| = \{cT, \mathbf{R}\}, \quad R_\mu R^\mu = 0. \quad (4.52)$$

Последнее равенство выражает то, что сигнал распространяется со скоростью света.

4.6.1.1 Получение потенциалов Лиенара-Вихерта через условие ковариантности

Потенциалы Лиенара-Вихерта быстрее всего получить из требования лоренцевской инвариантности всех математических формул, описывающих физические соотношения.

Перейдём в систему координат K' , в которой заряд в момент испускания s_r покоился. В силу (4.20), 4-потенциал зависит только от скорости частиц и их положения, но не от их ускорения. Поэтому потенциал в событии x'^μ может быть вычислен как статический потенциал заряда (см. Пункт 5.1.1):

$$\|A'^\mu\| = \left\{ \frac{e}{R'}, \vec{0} \right\} \Leftrightarrow A^\mu = \frac{e u^\mu}{R^\nu u_\nu}. \quad (4.53)$$

Вторым равенством мы переписали результат в (единственно возможной) ковариантной форме. Дело в том, что поскольку A'^μ является контравариантным вектором, то и справа должен стоять также контравариантный вектор для того, чтобы это равенство было верно

в любой системе координат. В рамках условия задачи в нашем распоряжении есть два 4-вектора – скорость заряда u^μ и вектор от источника до приёмника R^μ ; в специально выбранной системе координат K' 4-вектор скорости как раз равен $\|u'^\mu\| = \{1, \vec{0}\}$.

В трёхмерном виде получаем следующие выражения для потенциалов:

$$\Phi(t, \mathbf{r}) = \frac{e}{R(1 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})/c)}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}, \quad (4.54)$$

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{e\mathbf{v}/c}{R(1 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})/c)}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{z}(t_r).$$

4.6.1.2 Получение потенциалов Лиенара-Вихерта непосредственно из выражений для запаздывающих потенциалов

Воспользуемся формулой (2.40), а также ковариантными выражениями для функции Грина (4.19) и запаздывающих потенциалов (4.20). После интегрирования по пространству-времени и тем самым снятия 4-х мерной δ -функции, получим, что запаздывающие потенциалы переписываются в виде интеграла по мировой линии заряда

$$A^\mu(x) = 2e \int ds \theta(X^0) \delta(X_\mu X^\mu) u^\mu(s), \quad (4.55)$$

$$X^\mu(s) = x^\mu - z^\mu(s), \quad X^\mu(s_r) \equiv R^\mu(x).$$

Чтобы интегрированием по ds снять δ -функцию в (4.55), воспользуемся тем, что

$$\theta(X^0) \left| \frac{d}{ds} X_\nu X^\nu \right| \delta(X_\mu X^\mu) = \delta(s - s_r),$$

$$\frac{d}{ds} X_\nu X^\nu = -2X^\nu u_\nu.$$

Таким образом, потенциалы Лиенара-Вихерта имеют вид:

$$A^\mu(x) = 2e \int ds \frac{\delta(s - s_r)}{|2X^\nu u_\nu|} u^\mu(s) = \frac{e u^\mu}{u_\nu R^\nu},$$

где в последнем равенстве 4-скорость заряда u также берётся при $s = s_r$. Полученное выражение совпадает с (4.53).

4.6.2 Электрическое и магнитное поля

По результату (4.54) вычислим интересные с физической точки зрения электрическое и магнитное поля. Для того, чтобы это сделать, нужно уметь вычислять производную от момента испускания сигнала s_r по положению приёмника x . Дифференцируя скалярное равенство

в (4.52), получаем

$$0 = \frac{\partial(R_\nu R^\nu)}{\partial x^\mu} = 2R_\nu \left(\delta_\mu^\nu - \frac{\partial s_r}{\partial x^\mu} \frac{dz^\nu}{ds_r} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial s_r}{\partial x^\mu} = \frac{R_\mu}{R_\nu u^\nu}.$$

Теперь можно воспользоваться (5.38) для вычисления электромагнитного поля по выражению (4.53) для 4-потенциала (мы опускаем громоздкие, но прямолинейные выкладки):

$$\mathbf{E} = \frac{e \mathbf{R}_v}{\gamma^2 (\mathbf{R}_v \cdot \mathbf{n})^3} + \frac{e [\mathbf{R} \times [\mathbf{R}_v \times \mathbf{a}]]}{c^2 (\mathbf{R}_v \cdot \mathbf{n})^3}, \quad (4.56)$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}], \quad \mathbf{R}_v = \mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} R, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R},$$

где \mathbf{a} – ускорение частицы в момент t_r . Отметим, что магнитное и электрические поля ортогональны друг другу.

В (4.56) первое слагаемое в выражении для \mathbf{E} соответствует статическому полю; это слагаемое остаётся единственным, если заряд движется равномерно и прямолинейно. В соответствии с законом Кулона, при удалении от источника оно убывает обратно пропорционально квадрату расстояния. Для движущегося заряда, однако, распределение поля уже становится не изотропным в пространстве.

Второе слагаемое в (4.56) появляется только тогда, когда заряд движется с ускорением. При удалении от источника интенсивность этой части поля убывает медленнее, обратно пропорционально расстоянию. Такое убывание соответствует сферической волне, уходящей от источника. Действительно, этот вклад в электрическое поле ортогонален направлению \mathbf{n} от источника, как и должно быть для плоских волн (4.41).

4.6.2.1 Излучение релятивистски движущегося заряда

Проанализируем структуру поля излучения (4.56) в ультрарелятивистском пределе $\gamma \gg 1$. В знаменателе множитель

$$(\mathbf{R}_v \cdot \mathbf{n}) = R \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right) \rightarrow \frac{R}{2\gamma^2} (\gamma^2 \theta^2 + 1),$$

где θ – угол между скоростью частицы \mathbf{v} и направлением наблюдения \mathbf{n} ; мы сделали разложение по малому параметру $1/\gamma$ при малых углах $\theta \ll 1$. Из этого разложения следует, что знаменатель в (4.56) мал, когда $\theta \lesssim 1/\gamma$. Таким образом, основное излучение от частиц уходит по направлению её движения в телесный угол с раствором $1/\gamma$.

Характерная частота излучения ... если действует только магнитное поле, то

$$\omega \sim \frac{\gamma^3 c}{\rho}, \quad (4.57)$$

где ρ – радиус кривизны траектории частицы.

4.6.3 Поле равномерно движущегося заряда

Рассмотрим частный случай равномерно движущегося заряда, т.е. когда его ускорение равно нулю, $\mathbf{a} = 0$. В этом случае электрическое поле, создаваемое зарядом, даётся первым слагаемым в (4.56). Покажем, что в случае равномерного движения это слагаемое можно переписать в другом, геометрически более понятном виде.

Сперва заметим, что вектор

$$\mathbf{R}_v = \mathbf{r} - \left(z(t_r) + \frac{R}{c} \mathbf{v} \right) = \mathbf{r} - \mathbf{z}(t), \quad (4.58)$$

то есть он соединяет текущее положение заряда и точку наблюдения. Далее, из Рис.4.1 следует, что комбинация

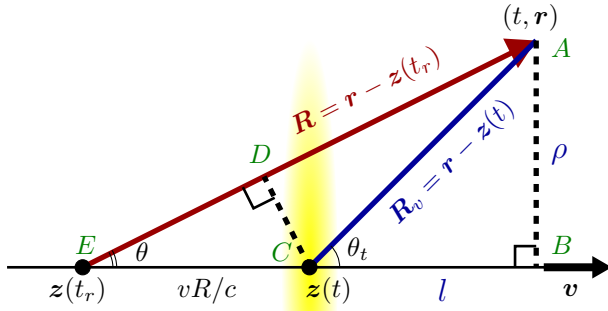
$$(\mathbf{R}_v \cdot \mathbf{n}) = R_v \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta_t}. \quad (4.59)$$

Таким образом, электрическое поле – первое слагаемое в (4.56) – есть

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) &= \frac{e (\mathbf{r} - \mathbf{z}(t))}{\gamma^2 |\mathbf{r} - \mathbf{z}(t)|^3} \frac{1}{(1 - (v/c)^2 \sin^2 \theta_t)^{3/2}} = \\ &= \frac{\gamma e (\mathbf{r} - \mathbf{z}(t))}{(\gamma^2 l^2 + \rho^2)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (4.60)$$

где, напомним, $\mathbf{z}(t)$ есть траектория заряда; мы также переписали выражение, введя прицельное расстояние ρ и расстояние l от текущего положения заряда $\mathbf{z}(t)$ до точки максимального сближения с точкой наблюдения. Из (4.56) следует, что магнитное поле равно

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{E}]}{c}. \quad (4.61)$$



Выражения (4.60,4.61) говорят о том, что если заряд движется с ультрарелятивистской скоростью, $\gamma \gg 1$, то распределение электромагнитного поля вокруг заряда становится сильно анизотропным. При фиксированном расстоянии $|\mathbf{r} - \mathbf{z}(t)|$ до текущего положения заряда, величина $1 - (v/c)^2 \sin^2 \theta_t$ меняется от единицы при $\theta_t = 0, \pi$ до $1/\gamma^2$ при $\theta_t = \pm\pi/2$. Таким образом, поле впереди и позади движения заряда значительно меньше, чем по бокам: при фиксированном расстоянии отношение равно $1/\gamma^3$. Построим поверхность постоянного по амплитуде электрического поля, сечение которой плоскостью рисунка (4.1) есть кривая $R_v(\theta_t)$. Поскольку при фиксированном направлении от заряда поле обратно пропорционально расстоянию, то $R_v(\pi/2) = \gamma^{3/2} R_v(0)$.

Рис. 4.1 Равномерное и прямолинейное движение заряда и его поле. Отрезки $AB \equiv \rho = R_v \sin \theta_t$, $EC = vR/c$, $DA = (\mathbf{R}_v \cdot \mathbf{n})$, $CB \equiv l$. Далее, $DA = \sqrt{R_v^2 - DC^2}$, а из подобия прямоугольных треугольников EDC и EBA заключаем, что $DC = EC(AB/EA) = (v/c)R_v \sin \theta_t$. Откуда следует (4.59). Жёлтым схематично обозначена область, где электрическое поле превышает некоторую (наперёд заданную) величину, было выбрано $\gamma = 4$.

Часть III

ПРИЛОЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Глава 5

СЛАБО РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЭФФЕКТЫ

§5.1. Поле неподвижных зарядов и их взаимодействие с внешним постоянным электрическим полем

5.1.1 Закон Кулона

Продemonстрируем сперва, как вытекает закон Кулона из выражения (4.20) для запаздывающих потенциалов. Для этого предположим статическое распределение зарядов, так что в 4-токе (2.39) ненулевой является только ρ -компонента (и она не зависит от времени), тогда как ток $\mathbf{j} = 0$. Тогда единственным нетривиальным уравнением в (4.17) является уравнение Пуассона на скалярный потенциал

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \quad (5.1)$$

а уравнение (4.20) отдельно для временной и пространственных и компонент гласит:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}') d^3r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \mathbf{A} = 0. \quad (5.2)$$

Согласно (5.38), электромагнитное поле

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi, \quad \mathbf{B} = 0. \quad (5.3)$$

Уравнение (5.2) называют *законом Кулона*, а φ в данном случае — *электростатическим потенциалом*.

Пусть есть только два точечных заряда e_1 и e_2 , расположенных в точках \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 соответственно. Тогда потенциал φ_1 и электрическое поле \mathbf{E}_1 , создаваемые первым зарядом, равны

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{e_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|}, \quad \mathbf{E}_1 = -\text{grad } \varphi_1 = \frac{e_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3}.$$

Сила \mathbf{F}_{21} (3.39), действующая со стороны первого заряда на второй, равна

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{e_1 e_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (5.4)$$

Собственно, это равенство принято называть *законом Кулона* (*Coulomb's law*).

5.1.2 Поле системы статических зарядов

Рассмотрим систему статических зарядов, ограниченную в пространстве. Пусть характерный диаметр системы равен a , начало координат поместим внутрь этой системы. Мы будем интересоваться полем, создающимся этими зарядами на расстояниях r , больших по сравнению с размером системы a , $r \gg a$. Заряды будем нумеровать индексом α , положение заряда \mathbf{r}_α , величину заряда — e_α .

Потенциал поля рассматриваемой системы зарядов определяется формулой (5.2). В нашем случае интегрирование по \mathbf{r}' в (5.2) ограничивается областью $r' < a$, где только и находятся заряды. Если мы рассматриваем область $r > a$, то в этой области зарядовая плотность ρ равна нулю и согласно (5.1) потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0.$$

Кроме того, потенциал убывает при удалении от системы. Поэтому φ может быть разложен по сферическим функциям:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{Q}{r} + \frac{d^i n^i}{r^2} + \frac{D^{ik} n^i n^k}{2r^3} + \frac{D^{ikl} n^i n^k n^l}{6r^4} + \dots = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \left(\sum_{m=-l}^{m=l} C_{lm} \mathcal{Y}_{lm} = \varphi_l \right), \end{aligned} \quad (5.5)$$

где $\mathcal{Y}_{lm}(\vartheta, \phi)$ — сферические гармоники (см., например, Olver и др., 2010, §14.30), а единичный вектор $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Первое и второе равенство в (5.5) представляют из себя разные, наиболее часто используемые формы записи членов разложения потенциала φ по обратным степеням r .

Между коэффициентами C_{lm} с фиксированным l и коэффициентами $D^{i\dots}$ с количеством индексов равным l существует невырожденная линейная связь. Подсчитаем количество линейно независимых коэффициентов D . Тензор D симметричен по любой паре индексов. Кроме

того, след по паре индексов может быть положен равным нулю,

$$D^{kk\dots} = 0. \quad (5.6)$$

Действительно, все члены ряда (5.5) могут быть получены l -кратным дифференцированием сферически-симметричного потенциала $1/r$ (поскольку результат дифференцирования также удовлетворяет уравнению Лапласа, но убывает как $1/r^{l+1}$):

$$\frac{(-1)^l}{l!(2l-1)!!} D^{ik\dots} \nabla_i \nabla_k \dots \frac{1}{r} = \frac{D^{ik\dots} n^i n^k \dots}{l! r^{l+1}}. \quad (5.7)$$

Любое ненулевое значение следа тензора D не изменяет левой части этого выражения, поскольку в области, не содержащей начало координат, $\Delta(1/r) = 0$. Для того, чтобы равенство (5.7) было верно, должно выполняться (5.6; в этом случае угловая зависимость правой части (5.7), как и должно быть, не имеет вклада от сферической гармоники порядка меньшего чем l . Теперь, в результате комбинаторного подсчёта приходим к тому, что количество линейно независимых элементов в тензоре D порядка l равно $2l+1$, что есть количество линейно независимых сферических гармоник этого порядка.

Тензора $D^{ik\dots}$ называются (электрическими) $2l$ -польными моментами системы зарядов. В частности, \mathbf{d} — дипольным, D^{ik} — квадрупольным, а D^{ikl} — октупольными моментами.

Ряды (5.5) соответствуют разложению в (5.2) по малому параметру a/r . Чем больше l , тем быстрее убывает соответствующий вклад в потенциал. Поэтому на далёких расстояниях от системы достаточно знать только первые коэффициенты в разложении (5.5) для приближённого описания распределения электрического поля в пространстве. Таким образом, тогда как система может содержать большое количество хаотически распределённых в пространстве зарядов, достаточно знать не более десятка интегральных параметров этого распределения, чтобы описать электрическое поле вдали от системы.

Обратимся к интерпретации членов разложения ряда (5.5), начав с нулевого члена разложения. Он соответствует сферически симметричному потенциалу, убывающему как $1/r$. Величина Q в (5.5) является полным зарядом системы,

$$Q = \int d^3r' \rho(r').$$

5.1.2.1 Дипольный момент

Величины d^i составляют вектор, который называется *дипольным моментом* системы. Сравнивая первый член разложения (5.2) по параметру $r'/r \ll 1$ и определение (5.5) φ_l получаем, что дипольный момент системы

зарядов равен

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_1}{r^2} &= \int \frac{\rho(r') (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n})}{r^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{d} = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

согласно виду разложения (5.5).

Дипольный момент определён однозначно только в том случае, если полный заряд системы равен нулю, $Q = 0$. В противном случае значение дипольного момента зависит от выбора начала системы координат; в частности, существует система координат, в которой дипольный момент заряженной системы равен нулю.

Точечным электрическим диполем \mathbf{d} , расположенным в начале координат, по определению называют распределение зарядов

$$\rho(\mathbf{r}) = -(\mathbf{d} \cdot \nabla) \delta(\mathbf{r}) = -\text{div}(\mathbf{d} \delta(\mathbf{r})). \quad (5.9)$$

Такое распределение зарядов обладает только дипольным моментом, так что в разложении (5.5) является ненулевым только вклад с $l = 1$. Электрическое поле точечного диполя

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \frac{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n})}{r^2} = \frac{3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{d}}{r^3}. \quad (5.10)$$

Рисунок поля диполя ...

Предположим, что полный заряд системы равен нулю, то есть система электронеитральна. Однако по тем или иным причинам в ней произошло пространственное смещение положительных и отрицательных зарядов относительно друг друга. В таком случае возможно представить распределение заряда через *плотность электрической поляризации* $\mathbf{P}(\mathbf{r})$. Локальная плотность заряда в системе

$$\rho = -\text{div} \mathbf{P}. \quad (5.11)$$

В частности, для точечного диполя (5.10) естественно поставить в соответствие

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \mathbf{d} \delta(\mathbf{r}).$$

При известной объёмной плотности зарядов ρ выбор вектора \mathbf{P} неоднозначен; его выбор должен соответствовать физическому смыслу, согласно которому $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ есть плотность дипольного момента. В частности, вне системы он должен обращаться в ноль. Из (5.8) вытекает, что дипольный момент системы

$$\mathbf{d} = \int d^3r \mathbf{P}(\mathbf{r}). \quad (5.12)$$

5.1.2.2 Квадрупольный момент

Если и полный заряд системы и её дипольный момент относительно малы, то имеет смысл интересоваться также и *квадрупольным моментом* системы, задаваемым

матрицей D^{ik} . Второй порядок разложения по малому параметру a/r в (5.2) равен

$$\frac{\varphi_2}{r^3} = \frac{1}{2} \int d^3 r' \frac{\rho(\mathbf{r}') (3(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n})^2 - |\mathbf{r}'|^2)}{r^3} \Rightarrow \quad (5.13)$$

$$D^{ik} = \int d^3 r \rho(\mathbf{r}) (3r^i r^k - |\mathbf{r}|^2 \delta^{ik})$$

в силу определения (5.5). Легко проверить, что необходимые свойства матрицы квадрупольного момента $D^{ki} = D^{ik}$ и $D^{ii} = 0$ выполняются. Всего существует 5 независимых параметров, определяющих квадрупольный момент системы.

Значение квадрупольного момента не зависит от выбора начала системы координат только в том случае, если полный заряд и дипольный момент системы равны нулю.

5.1.3 Электростатическая энергия

Рассмотрим систему неподвижных зарядов, которую можно считать бесконечно удалённой от других зарядов. Тогда полная энергия системы равна

$$E_{\text{tot}} = \int d^3 r T^{00} = Mc^2 + E,$$

см. (4.24), где M — суммарная масса покоя всей системы, а E — энергия электрического поля \mathbf{E} всей системы, также называемая *электростатической энергией*. Пусть распределение зарядов в пространстве описывается зарядовой плотностью $\rho(\mathbf{r})$. Тогда электростатическая энергия E может быть записана в следующих видах:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{8\pi} \int d^3 r \mathbf{E}^2 = \frac{1}{2} \int d^3 r \rho \varphi = \quad (5.14) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3 r_1 d^3 r_2 \frac{\rho(\mathbf{r}_1)\rho(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}, \end{aligned}$$

Первое выражение соответствует выражению для T^{00} -компоненты тензора энергии-импульса электромагнитного поля (4.29) и тому, что полный тензор энергии-импульса является прямой суммой вкладов от частиц и электромагнитного поля, см. (4.24).

Второе выражение получено из первого путём использования (5.1) и интегрирования по частям. Этот вид записи электростатической энергии соответствует (3.31). Действительно, после подстановки φ в виде (5.2) получаем третью форму записи в (5.14) и замечаем, что множитель $1/2$ в (5.14) компенсируется тем, что энергия взаимодействия каждой пары зарядов учитывается 2 раза.

5.1.3.1 Классический радиус электрона

Если формально посчитать электростатическую энергию точечного заряда, то мы получим расходящийся на

малых масштабах интеграл в первом варианте записи (5.14). Реально в физике такой проблемы не существует, поскольку в силу квантовых эффектов все частицы на малых расстояниях описываются локализованной в конечном объёме волновой функцией. А если зарядовая плотность остаётся конечной во всём пространстве, то из третьей формы записи в (5.14) следует, что электростатическая энергия также является конечной. Тем не менее, формально в классической релятивистской электродинамике рассматриваются только точечные частицы, что делает эту теорию неприменимой на малых масштабах и, вообще говоря, содержащей внутренние противоречия.

Отойдём от строгости классической электродинамики и представим электрон как полую сферу радиуса r_0 , по которой равномерно распределён его заряд. Скажем, что масса электрона m_e имеет чисто электромагнитную природу,

$$\frac{e^2}{r_0} = m_e c^2, \quad r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2.8 \cdot 10^{-13} \text{ см}. \quad (5.15)$$

Построенная таким образом величина r_0 называется “классическим радиусом электрона”, или *радиусом Лоренца*, а также *длиной томсоновского рассеяния* (*the classical electron radius, the Lorentz radius, or the Thomson scattering length*). Подчеркнём, однако, что самостоятельного физического смысла длина r_0 не имеет.

5.1.4 Энергия системы зарядов во внешнем электрическом поле

Теперь зададимся вопросом — какова энергия E_E локализованной в пространстве системы неподвижных зарядов во внешнем стационарном электрическом поле? Как мы увидим, в выражение для приближённого значения этой энергии входят уже введённые мультипольные моменты.

Пусть все заряды разделены на две части,

$$\rho_{\text{tot}} = \rho + \rho_{\text{ext}}, \quad (5.16)$$

где ρ_{tot} — полная плотность зарядов, ρ — плотность зарядов в интересующей нас системе, а ρ_{ext} — плотность тех ‘внешних’ зарядов, которые создают электрическое поле \mathbf{E} , действующее на интересующую нас систему. Мы будем предполагать, что положение ‘внешних’ зарядов фиксировано и разделено в пространстве с зарядами системы.

Нас интересует энергия взаимодействия E_E ‘внешних’ зарядов и зарядов системы. Из (5.14) следует, что эта энергия равна

$$\begin{aligned} E_E &= \int \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}') \frac{d^3 r' d^3 r}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}) = \int d^3 r \varphi_{\text{ext}} \rho = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3 r (\mathbf{E}_s \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}), \quad (5.17) \end{aligned}$$

где мы обозначили через φ_{ext} электростатический потенциал, создаваемый ‘внешними’ зарядами, \mathbf{E}_{ext} — электрическое поле внешних зарядов, а \mathbf{E}_s — поле, создаваемое исследуемой системой зарядов, так что

$$\mathbf{E}_{\text{ext}} = -\text{grad } \varphi_{\text{ext}}, \quad \text{div } \mathbf{E}_s = 4\pi\rho.$$

Выражение (5.17) может быть также получено из выражения для потенциальной энергии точечного заряда (3.31).

5.1.4.1 Энергия поляризованного тела во внешнем поле

Пусть полный заряд системы равен нулю, так что объёмная плотности заряда представима через поляризацию \mathbf{P} , см. (5.11). В таком случае энергия тела во внешнем поле может быть записана в виде

$$E_E = -\int d^3r (\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}), \quad (5.18)$$

который продолжает цепочку равенств (5.17).

5.1.4.2 Мультипольное разложение энергии системы зарядов во внешнем поле

Сейчас мы предполагаем, что ‘внешние’ заряды находятся на расстоянии от системы, большом по сравнению с её характерным диаметром a . Поэтому потенциал φ_{ext} медленно меняется внутри системы. Выберем какую-либо точку \mathbf{R} , находящуюся внутри системы зарядов, и пусть вектор \mathbf{r} — отклонение от этой точки. Тогда потенциал φ_{ext} можно разложить в ряд

$$\varphi_{\text{ext}} = \varphi + \varphi_i r^i + \frac{1}{2} \varphi_{ik} r^i r^k + \frac{1}{6} \varphi_{ikl} r^i r^k r^l + \dots \quad (5.19)$$

где, например, φ_{ik} означает 2-х кратную производную от потенциала φ_{ext} по направлениям ‘ i ’ и ‘ k ’, взятую в точке \mathbf{R} . Симметричные свойства тензоров φ совпадают с симметричными свойствами тензоров мультипольных моментов D (5.5). Действительно, во-первых φ симметричны по перестановкам индексов, поскольку результат не зависит от порядка дифференцирования. Во-вторых, свёртка по любой паре индексов в любом коэффициенте разложения даёт нуль, поскольку в области расположения системы зарядов потенциал ‘внешних’ зарядов удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\varphi_{\text{ext}} = 0$. Вообще, разложение (5.19) аналогично разложению (5.5), но только в текущем случае разложение потенциала регулярно в нуле.

Теперь в последнем равенстве (5.17) остаётся проинтегрировать по \mathbf{r} каждый член разложения (5.19). При этом получаются как раз мультипольные моменты, так что в итоге энергия взаимодействия записывается в виде ряда

$$E_E = \varphi Q - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}) + \frac{1}{6} D_{ik} \varphi_{ik} + \frac{1}{90} D_{ikl} \varphi_{ikl} + \dots \quad (5.20)$$

5.1.5 Сила и момент сил, действующих на диполь

Найдём силу и момент сил, действующие на систему зарядов как целое со стороны внешнего электрического поля. Будем считать систему электро нейтральной, и рассмотрим самую простую ситуацию, когда распределение зарядов в системе достаточно характеризовать её дипольным моментом \mathbf{d} . Для лаконичности записи внешнее по отношению к системе электрическое поле лишим индекса, так что

$$\mathbf{E}_{\text{ext}} \rightarrow \mathbf{E}.$$

Положение системы как целого определяется вектором \mathbf{R} . Система может не только двигаться поступательно, но и вращаться в пространстве. Последнее приводит к вращению её дипольного момента \mathbf{d} . Внутреннюю структуру системы мы считаем неизменной.

Лагранжиан системы как целого во внешнем поле может быть выделен из полного лагранжиана:

$$L(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}, \mathbf{d}) = \frac{M \dot{\mathbf{R}}^2}{2} - E_E + \text{“}\rho^2\text{”} + \text{“}\rho_{\text{ext}}^2\text{”} \quad (5.21)$$

где M — полная масса системы, а потенциальная энергия диполя во внешнем поле

$$E_E = -(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}), \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{R}).$$

Мы использовали нерелятивистское выражение для кинетической энергии, поскольку речь идёт о статическом распределении зарядов. Два последних вклада, записанные символически и соответствующие электростатической энергии отдельных подсистем, остаются постоянными, поскольку внутренняя конфигурация зарядов системы, как и ‘внешних’ зарядов, остаётся неизменной.

Сила \mathbf{F} , действующая на диполь как целое со стороны внешнего поля \mathbf{E} , равна (магнитное поле отсутствует, поэтому обобщённый импульс \mathbf{P}_{gen} совпадает с просто импульсом \mathbf{P})

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &\equiv \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{R}}} = \\ &= \frac{\partial L}{\partial \mathbf{R}} = -\text{grad } E_E = \text{grad}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}) = (\mathbf{d} \cdot \nabla) \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Последнее равенство было написано, поскольку

$$0 = [\mathbf{d} \times \text{rot } \mathbf{E}] = \text{grad}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}) - (\mathbf{d} \cdot \nabla) \mathbf{E},$$

и подразумевается, что дипольный момент \mathbf{d} не зависит от координаты.

Для того, чтобы получить момент сил, действующий на диполь, представим вариацию координаты \mathbf{r} каждого заряда, составляющего диполь, в виде $\delta \mathbf{r} = [\delta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]$, где вектор углового поворота $\delta \boldsymbol{\omega}$ зависит только от времени. В таком случае вариация дипольного момента всей

системы равна $\delta \mathbf{d} = [\delta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}]$. Момент сил \mathbf{M} , действующий на диполь, равен

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \boldsymbol{\omega}} = \\ &= \frac{\delta L}{\delta \boldsymbol{\omega}} = \frac{(\mathbf{E} \cdot \delta \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{d})}{\delta \boldsymbol{\omega}} = [\mathbf{d} \times \mathbf{E}]. \end{aligned} \quad (5.23)$$

§5.2. Поле постоянных токов и их взаимодействие с внешним постоянным магнитным полем

Рассмотрим систему постоянных во времени токов, описывающуюся распределением тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$. В таком случае токи являются бездивергентными, $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$, поскольку объёмная плотность зарядов в системе по нашему предположению не изменяется со временем. Мы будем считать, что статические объёмные заряды в системе отсутствуют.

Будем исследовать электромагнитное поле, индуцированное этой системой. Электрическое поле равно нулю, что можно увидеть, записав 4-потенциал в калибровке Лоренца: в ней скалярный потенциал равен нулю, $\varphi = 0$, а вектор-потенциал не зависит от времени, см. (5.38). Таким образом, система стационарных токов создаёт вне себя только статическое магнитное поле \mathbf{B} , удовлетворяющее уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (5.24)$$

Соотношение, позволяющее определить магнитное поле по распределению токов в пространстве, называется *законом Био-Савара-Лапласа* и получено в Пункте 5.2.1.

Также как это было сделано в Пункте 5.1.2 для системы неподвижных зарядов, магнитное поле вокруг системы токов возможно аппроксимировать на далёких от неё расстояниях, используя только несколько интегральных параметров пространственного распределения токов внутри системы. Действительно, вне системы токов пустота, поэтому там магнитное поле потенциально, поскольку удовлетворяет уравнению $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. Поскольку оно и бездивергентно, $\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0$, то потенциал магнитного поля φ_B удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\mathbf{B} = -\operatorname{grad} \varphi_B, \quad \Delta \varphi_B = 0. \quad (5.25)$$

Потенциал φ_B убывает на далёких расстояниях от системы токов. Поэтому он представим в виде ряда, аналогичного ряду для потенциала статического электрического поля (5.5):

$$\varphi_B = \frac{\mu^i n^i}{r^2} + \frac{\mathbf{m}^{ik} n^i n^k}{2r^3} + \frac{\mathbf{m}^{ikl} n^i n^k n^l}{6r^4} + \dots = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varphi_{Bl}}{r^{l+1}}. \quad (5.26)$$

Нулевой член разложения (с $l = 0$) в этом ряду отсутствует, поскольку $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ во всём пространстве (иными словами, у системы отсутствует магнитный заряд).

где, напомним, \mathbf{L} — момент импульса системы.

Вектор $\boldsymbol{\mu}$ называется вектором магнито-дипольного момента системы.

Аналогия между электростатикой и магнитостатикой распространяется и на поведение системы токов во внешнем магнитном поле, см. Пункт 5.1.4.

В рассуждениях мы предполагаем, что система токов обладает пространственной конфигурацией, не зависящей от времени. Тем не менее, все результаты можно обобщить на случай, когда система токов (движущихся зарядов) хотя формально не стационарна, но возможно произвести усреднение по времени, получив в среднем стационарную систему токов. В таком случае под плотностью тока \mathbf{j} следует понимать усреднённую по времени плотность тока:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sum_a e_a \langle \mathbf{v}_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \rangle, \quad \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (5.27)$$

где угловые скобки означают усреднение по времени, а индекс a нумерует заряды в системе. Поскольку ток \mathbf{j} стационарен и ограничен в пространстве, его дивергенция равна нулю.

5.2.1 Закон Био-Савара-Лапласа

Получим *закон Био-Савара-Лапласа (Biot-Savart law)*. Для этого предположим, что в пространстве нет нескомпенсированных зарядов, $\rho = 0$, а токи постоянны $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$. Уравнение (5.24) удобней решать через вектор-потенциал в калибровке Лоренца:

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (5.28)$$

см. общее выражение (4.20) для запаздывающих потенциалов и сравни с (5.1,5.2). Для того, чтобы найти магнитное поле, надо воспользоваться $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, см. (5.38).

В индексном виде получаем

$$\begin{aligned} B^i(\mathbf{r}) &= \epsilon_{ikl} \frac{\partial A^l}{\partial r^k} = \frac{\epsilon_{ikl}}{c} \int j^l(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \frac{\partial}{\partial r^k} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \\ &= \frac{1}{c} \int \frac{\epsilon_{ikl} j^l(\mathbf{r}') (r'^k - r^k) d^3 \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \end{aligned}$$

Это же самое, записанное в векторных обозначениях, принимает вид закона Био-Савара-Лапласа:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}'. \quad (5.29)$$

5.2.2 Магнито-дипольный момент

В этом Пункте мы покажем, что магнитное поле \mathbf{V} , создающееся системой стационарных токов на далёком от себя расстоянии, может быть представлено как поле магнитного диполя $\boldsymbol{\mu}$. Свойства этого диполя аналогичны свойствам электрического диполя, но создаёт и взаимодействует магнитный диполь с магнитным полем.

Исследуем формулу (5.28) на далёких расстояниях, при $r \rightarrow \infty$. Сперва заметим, что поскольку токи постоянны и замкнуты, то $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$, поэтому среднее по пространству от вектора тока равно нулю,

$$\int d^3\mathbf{r}' j^k(\mathbf{r}') = \int d^3\mathbf{r}' \partial_i (r'^k j^i) = 0.$$

Поэтому для того, чтобы в (5.28) получить ненулевой вклад, надо знаменатель в подынтегральном выражении разложить до первого порядка по малому r'/r :

$$A^i(\mathbf{r}) = \frac{n^k}{r^2} \int d^3\mathbf{r}' \frac{j^i r'^k}{c}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (5.30)$$

Стоящий здесь интеграл есть *магнито-дипольный момент* $\boldsymbol{\mu}$

$$\epsilon_{ikl} \mu^l = \mu^{ik} = \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{r}' r^i j^k, \quad \mu^{ik} = -\mu^{ki},$$

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c} \int d^3\mathbf{r}' [\mathbf{r}' \times \mathbf{j}], \quad (5.31)$$

см. определения (6.25). В антисимметричности исходного интеграла в (5.30) можно убедиться, снова воспользовавшись условием бездивергентности тока:

$$\int d^3\mathbf{r}' (r^i j^k + r^k j^i) = \int d^3\mathbf{r}' \partial_m (r^i r^k j^m) = 0.$$

В итоге получаем, что вектор-потенциал в калибровке Лоренца, магнитное поле и скалярный потенциал (5.26) системы токов на далёком от неё расстоянии задаются выражениями

$$\mathbf{A} = \frac{[\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{n}]}{r^2}, \quad \mathbf{V} = \frac{3(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}}{r^3}, \quad \varphi_{B1} = (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}). \quad (5.32)$$

Выражение для магнитного поля совпадает с полем электрического диполя (5.10) с точностью до замен $\boldsymbol{\mu} \leftrightarrow \mathbf{d}$, $\mathbf{V} \leftrightarrow \mathbf{E}$, $\varphi_B \leftrightarrow \varphi$.

Если систему имеет смысл представить в виде точечного объекта, то распределение токов в ней следует моделировать *точечным магнитным диполем*. Будучи расположен в начале координат, он имеет распределение токов

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -[\boldsymbol{\mu} \times \nabla] \delta(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} (c \boldsymbol{\mu} \delta(\mathbf{r})). \quad (5.33)$$

Легко убедиться, что магнитный момент (5.31) такой системы токов равен $\boldsymbol{\mu}$. Для точечного диполя выражения (5.32) формально применимы во всём пространстве.

5.2.3 Потенциальная энергия системы токов в магнитное поле

Рассмотрим систему постоянных токов, образующую из себя магнитный диполь. Эта система помещена во внешнее слабо неоднородное магнитное поле \mathbf{V} , создающееся токами расположенными вдали от исследуемой системы и потому слабо меняющееся на масштабе порядка размера системы. Наша цель – посчитать силу и момент сил, действующую на эту систему токов со стороны поля \mathbf{V} .

Из (3.29) следует, что полный лагранжиан рассматриваемой системы представим в виде

$$L = L_0 + L_B, \quad L_B = \frac{1}{c} \sum_a e_a (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_a),$$

где L_0 – лагранжиан системы в отсутствии магнитного поля. Вклад L_B после усреднения по времени может быть переписан в виде потенциальной энергии системы токов во внешнем магнитном поле,

$$L_B = \frac{1}{c} \sum_a e_a \langle (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_a) \rangle = \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{r} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{j}) \quad (5.34)$$

где \mathbf{j} – ток в исследуемой системе. Вектор-потенциал \mathbf{A} можно в главном приближении считать линейной функцией координат в области расположения рассматриваемой системы токов, представив его в виде $A^i = A^i(0) + r^k \partial_k A^i$ (мы поместили начало координат внутрь системы). В результате придём к тому, что

$$L_B = \frac{\partial_k A^i}{c} \int d^3\mathbf{r}' r^k j^i = (\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\mu}), \quad (5.35)$$

см. (5.31). Таким образом, величину $-L_B$ следует интерпретировать как энергию магнитного диполя в магнитном поле.

Теперь мы можем провести те же рассуждения, которые были проделаны для электрического диполя, см. Пункт 5.1.5. Сила \mathbf{F} и момент сил \mathbf{M} , действующие на систему токов малого размера со стороны внешнего магнитного поля, равны

$$\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathbf{V}, \quad \mathbf{M} = [\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{V}], \quad (5.36)$$

по аналогии с (5.22) и (5.23).

Операцию усреднения по времени можно производить на любом этапе решения задачи. В Пункте 7.5.2.1 усреднение произведено над силой Лоренца (3.39), в результате чего, как и должно быть, получаются те же выражения (5.36).

§5.3. Дипольное и квадрупольное излучение

В § 5.1 была построена аппроксимация электрического поля, создаваемого локализованной системой статических зарядов на далёком от неё расстоянии. Затем в § 5.2 была рассмотрена система стационарных токов; исследовалось магнитное поле, которое она создаёт на далёких расстояниях.

Рассмотрим теперь систему движущихся нерелятивистских зарядов и выясним, какое электромагнитное поле эта система создаёт вокруг себя. Пусть характерный размер системы равен a , а характерная скорость зарядов в ней равна v . Мы интересуемся полем, которое создают эти заряды на расстояниях r , больших по сравнению с размером системы a .

На близких расстояниях до системы распределение электрического поля может быть приближено через мультипольное разложение, описанное в § 5.1. Это описание годится, пока время распространения сигнала от системы до точки наблюдения r/c (где r — расстояние от системы до наблюдателя) мало по сравнению с временем существенного изменения распределения зарядов внутри системы, которое может быть оценено как a/v . Эта область расстояний называется *ближней зоной* (*near-field region*). На этих же расстояниях магнитное поле возможно вычислить через уравнения магнито-статики, как это было проделано в § 5.2. Однако на больших расстояниях, когда $r \gg ca/v$, статические выражения для электромагнитного поля становятся неприменимыми. Действительно, распределение зарядов и токов успеет заметно измениться, пока сигнал дойдёт от системы до точки наблюдения. Эта область называется *волновой или дальней зоной* (*far field region*). Итак,

$$\begin{aligned} \text{ближняя зона :} \quad r &\ll \frac{c}{v}a, & (r \gg a), \\ \text{волновая (дальняя) зона :} \quad r &\gg \frac{c}{v}a & (5.37) \end{aligned}$$

В волновой зоне электромагнитное поле сильно отличается от того, которое предсказывает статическая теория. Оно определяется уходящими электромагнитными волнами, которые излучает система неравномерно движущихся зарядов.

Как и в §§ 5.1,5.2, построение теории производится путём разложения электромагнитного поля по малому отношению a/r . Ниже мы увидим, что этот параметр работает в ближней зоне, тогда как в волновой зоне это разложение переходит в разложение по малому параметру $v/c \ll 1$. Таким образом, для возможности построения теории заряды должны двигаться с нерелятивистскими скоростями, $v/c \ll 1$. Целью этого параграфа является исследование радиационных эффектов в наинизших порядках по отношению v/c . Будут проанализированы электро-дипольный, магнито-дипольный и квадрупольный вклады в излучение.

Процедуру разложения надо применять к общему выражению (4.20) для запаздывающих потенциалов. Для дальнейших вычислений будет полезным выписать разложения для обратного расстояния (по сравнению с (4.20) мы произвели переобозначение $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{r}'$)

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')}{r^2} + \frac{3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')^2 - r'^2}{2r^3} + \dots,$$

и для значения 4-тока j^μ в прошлом:

$$\begin{aligned} j^\mu(t_r, \mathbf{r}') = & \left(1 + \left(\frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')}{c} + \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')^2 - r'^2}{2cr} \right) \partial_t + \right. \\ & \left. + \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')^2}{2c^2} \partial_t^2 + \dots \right) j^\mu(t_R, \mathbf{r}'), \end{aligned}$$

где $t_R = t - r/c$ — время распространения сигнала от центра системы до наблюдателя, а $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ — единичный вектор направленный от системы (источника) к точке наблюдения.

5.3.1 Поле электрического диполя

Выделим теперь в (4.20) слагаемые, пропорциональные дипольному моменту (5.8), используя выписанные разложения по координате смещения внутри системы зарядов. Вектор-потенциал в калибровке Лоренца имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial_t}{c} \right) \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d})}{r}, \quad \mathbf{d} = \mathbf{d}(t_R), \quad (5.38)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\dot{\mathbf{d}}}{r}, \quad \dot{\mathbf{d}} = \partial_t \mathbf{d} = \int d^3r' \mathbf{j}(t_R, \mathbf{r}')$$

Определение дипольного момента \mathbf{d} совпадает с данным статическим выражением (5.8). Здесь первый вклад в скалярный потенциал φ соответствует потенциалу статического диполя (5.5,5.8); остальные вклады в 4-потенциал возникают, если диполь изменяется во времени. В действительности в разложении (4.20) мы удержали члены первого порядка малости по малым безразмерным параметрам

$$\frac{a}{r} \ll 1, \quad \text{и} \quad \frac{a\partial_t}{c} \sim \frac{v}{c} \ll 1. \quad (5.39)$$

Отсюда видно, что для возможности проведения разложения требуется в том числе условие медленности движения зарядов, $v \ll c$.

Используем теперь (5.38) для получения выражения для электромагнитного поля. Электрическое поле

$$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{d}}{r^3} + \frac{3(\dot{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \dot{\mathbf{d}}}{cr^2} + \frac{[\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}]]}{c^2 r}. \quad (5.40)$$

Первое слагаемое в этой сумме есть поле статического диполя, см. (5.10). Именно этот вклад оказывается ведущим в ближней зоне. В выражении для магнитного поля (поскольку диполь в нашем рассмотрении уже точечный объект, то можно пользоваться выражением $\mathbf{B} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]$ (4.56), связывающим магнитное с электрическим полем)

$$\mathbf{B} = -\frac{[\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{d}}]}{cr^2} - \frac{[\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}]}{c^2 r} \quad (5.41)$$

первое слагаемое — поле (элемента) постоянного тока, и, соответственно, совпадает выражением Био-Савара-Лапласа (5.29). В ближней зоне этот вклад является доминирующим.

5.3.1.1 Излучение

В волновой зоне ведущими в выражениях для электромагнитного поля (5.40, 5.41) оказываются последние слагаемые в правых частях. Соотношение между электрическим и магнитными полями соответствует плоской волне (4.41), распространяющейся в направлении от источника. Амплитуда этих вкладов убывает обратно пропорционально расстоянию до источника, а временная зависимость входит через $t_R = t - r/c$. Таким образом, в волновой зоне электромагнитное поле представляет из себя расходящуюся волну (??). Угловая симметрия волны определяется типом излучения, в данном случае электро-дипольным.

Проведём вычисления. Плотность потока энергии, связанного с уходящими от источника волнами (вектор Пойтинга (4.30)) в волновой зоне

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] = \frac{[\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}]^2}{4\pi c^3 r^2} \mathbf{n}, \quad (5.42)$$

$$\frac{dI_d}{d\omega} = r^2 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) = \frac{|\ddot{\mathbf{d}}(t_R)|^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta,$$

где dI_d — интенсивность излучения, уходящая в элемент телесного угла $d\omega$, а θ — угол между вектором \mathbf{d} и направлением наблюдения \mathbf{n} . Таким образом, диполь не изучает в направлении своего ускорения. Вычисляя интеграл по всем сферическим углам находим, что полная интенсивность излучения, проходящая через сферу радиуса r окружающую источник, равна

$$I_d(t) = r^2 \int d\omega (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) = \frac{2(\ddot{\mathbf{d}}(t_R))^2}{3c^3}. \quad (5.43)$$

Отметим два общих момента на примере электро-дипольного излучения. Для выделения частей поля, соответствующих уходящему излучению, в разложении (4.20) надо удерживать только нулевой порядок по малому параметру a/r (5.39). Соответственно, поле уходящих волн зависит от второй временной производной дипольного момента. Поэтому, во-первых, здесь нет неопределённости, зависящей от выбора начала системы координат, которая имела место быть при вычислении статического дипольного момента при ненулевом полном

заряде, поскольку эта неопределённость добавляет в дипольный момент константу, не зависящую от времени. Во-вторых, излучение возникает только в том случае, если заряды движутся с ускорением. Эти рассуждения обобщаются на любой тип излучения.

Рассмотрим частный случай, когда заряды в системе совершают периодическое движение с частотой ω , так что

$$\mathbf{d} = 2 \operatorname{Re} (\mathbf{d}_0 \exp(-i\omega t)), \quad (5.44)$$

где \mathbf{d}_0 — комплексная амплитуда колебаний диполя. В таком случае комплексные амплитуды полей

$$\mathbf{B} = k^2 \left(1 + \frac{i}{kr}\right) \frac{[\mathbf{n} \times \mathbf{d}_0]}{r}, \quad (5.45)$$

$$\mathbf{E} = (1 - ikr) \frac{3(\mathbf{d}_0 \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{d}_0}{r^3} - \frac{k^2 [\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{d}_0]]}{r},$$

где волновой вектор $k = \omega/c$. Средняя по периоду колебаний интенсивность излучения в единицу телесного угла и полная интенсивность излучения равны

$$\frac{dI_d}{d\omega} = \frac{c}{2\pi} \operatorname{Re} (\mathbf{n} \cdot [\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*]), \quad I_d = \frac{4\omega^4 |\mathbf{d}_0|^2}{3c^3}. \quad (5.46)$$

5.3.2 Магнито-дипольный и квадрупольный вклады

Как и электро-дипольный момент, изменяющиеся во времени магнито-дипольный и/или квадрупольный моменты системы также проводят к излучению системой электромагнитных волн. Оба этих вклада в электромагнитное поле имеют один и тот же порядок — второй — по малым параметрам (5.39). Поэтому отдельной задачей является разделение этих вкладов для установления их соответствия с магнито-дипольным и квадрупольными моментами системы.

5.3.2.1 Магнито-дипольное излучение

Для того, чтобы выделить вклад от магнито-дипольного момента, рассмотрим вклад второго порядка по малым параметрам (5.39) в вектор-потенциал \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}^k = n^i \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial_t}{c} \right) \frac{1}{r} \int d^3 r' \frac{r'^i j^k}{c}, \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}(t_R, \mathbf{r}').$$

В отличие от § 5.2, сейчас мы рассматриваем нестационарную ситуацию. Поэтому в общем случае $\operatorname{div} \mathbf{j} \neq 0$, и мы не можем непосредственно воспользоваться определением магнитного момента (5.31). Для того, чтобы выделить мгновенное значение магнитного момента, разделим тензор второго порядка, стоящий под знаком интеграла, на симметричную и антисимметричную части:

$$\frac{r'^i j^k}{c} = \frac{r'^i j^k + r'^k j^i}{2c} + \frac{r'^i j^k - r'^k j^i}{2c}.$$

При интегрировании по d^3r' второго слагаемого в правой части мы получим мгновенное значение магнитодипольного момента μ^{ik} . Интеграл по d^3r' от первого слагаемого можно представить как полную производную по времени. В результате вектор-потенциал оказывается представим в виде

$$A^k = \frac{n^i}{2cr} \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial_t}{c} \right) \partial_t \int d^3r' r'^i r'^k \rho + \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial_t}{c} \right) \frac{[\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{n}]^k}{r}, \quad \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(t_R). \quad (5.47)$$

Выражение (5.47) переходит в выражение для вектор-потенциала статического магнитного диполя (5.32) в ближней зоне.

Удержим пока что в (5.47) только второй, магнитодипольный, вклад. Используя (5.38) получаем, что электромагнитное поле

$$\mathbf{B} = \frac{3(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}}{r^3} + \frac{3(\dot{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\mu}}}{cr^2} + \frac{[\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \ddot{\boldsymbol{\mu}}]]}{c^2 r},$$

$$\mathbf{E} = \frac{[\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\mu}}]}{cr^2} + \frac{[\mathbf{n} \times \ddot{\boldsymbol{\mu}}]}{c^2 r}. \quad (5.48)$$

Видна зеркальная симметрия между полями электрического диполя (5.40,5.41) и полями магнитного диполя (5.48).

5.3.2.2 Квадрупольное излучение

Нам осталось учесть вклад всего второго порядка разложения в скалярный потенциал и часть вклада этого порядка в вектор-потенциал, выписанную в первой строчке (5.47). Результат в действительности зависит только от квадрупольного момента системы D^{ik} (5.13). Чтобы показать это формально, совершим калибровочное преобразование (4.1) с

$$f = -\frac{\partial_t}{6cr} \int d^3r' r'^2 \rho(t_R, \mathbf{r}'), \quad \partial_\mu \partial^\mu f = 0,$$

которое, отметим, не нарушает условие калибровки Лоренца вне излучающей системы. Теперь, используя

определение квадрупольного момента (5.13) получаем, что исследуемая часть 4-потенциала принимает вид

$$\varphi = \frac{D^{ik} n^i n^k}{2r^3} + \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial_t}{c} \right) \frac{n^i n^k \partial_t D^{ik}}{6cr},$$

$$A^k = \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial_t}{c} \right) \frac{n^i \partial_t D^{ik}}{6cr}. \quad (5.49)$$

Первое слагаемое в выражении для скалярного потенциала φ соответствует полю статического квадрупольного момента, см. (5.5). На далёких расстояниях электрическое поле представляет из себя расходящуюся сферическую волну

$$\mathbf{E}^i = \frac{(n^i n^k - \delta^{ik}) n^l \partial_t^3 D^{lk}}{6c^3 r}, \quad \mathbf{B} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]. \quad (5.50)$$

Интенсивность излучения в единицу телесного угла

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{1}{144\pi c^5} \left(n^i n^k \ddot{D}^{il} \ddot{D}^{kl} - (n^i n^k \ddot{D}^{ik})^2 \right). \quad (5.51)$$

Дипольный, квадрупольный и магнито-дипольный вклады в излучение интерферируют между собой. Для того, чтобы найти интенсивность излучения в элемент телесного угла, надо произвести сложение полей, а после вычислить вектор Пойнтинга. Однако полная интенсивность излучения I является арифметической суммой интенсивностей каждого вида излучения по отдельности,

$$I = I_d + I_\mu + I_D,$$

поскольку электромагнитное поле для каждого вида излучения имеет свою отличную от других вкладов угловую симметрию, в результате чего перекрёстные вклады в интенсивность излучения при интегрировании по углам обращаются в нуль. Полные интенсивности магнито-дипольного и квадрупольного излучений равны

$$I_\mu = \frac{3(\dot{\boldsymbol{\mu}})^2}{2c^3}, \quad I_D = \frac{\ddot{D}^{ik} \ddot{D}^{ik}}{180 c^5}. \quad (5.52)$$

§5.4. Мультипольное излучение

Обзор по мультипольным электрическим, магнитными и тороидальным моментам Dubovik и Tugushev (1990), также для технических вещей имеет смысл посмотреть Radescu Jr и Vaman (2012).

В § 5.3 были рассмотрены поля системы зарядов и токов, характеризующейся переменными во времени электро-дипольным, электро-квадрупольным и магнито-дипольным моментами. Обычно эти вклады в поле являются доминирующими, поэтому ими ограничиваются при исследовании формально бесконечного

ряда в разложении поля по малым параметрам (5.39) — малости размера системы и медленности движения внутри ней зарядов. В этом параграфе мы развиваем общую схему разложения в ряд по этим малым параметрам.

5.4.1 Магнито-мультипольное разложение в статике

Рассмотрим ограниченную в пространстве систему стационарных токов, $\text{div } \mathbf{j} = 0$. Представим плотность тока в виде

$$\mathbf{j} = c \text{rot } \mathfrak{M} \quad (5.53)$$

что возможно согласно (7.15,7.17). Мы требуем, чтобы вектор \mathfrak{M} был ограничен по амплитуде и обращался в нуль вне системы. Однако это требование не фиксирует его однозначно; к \mathfrak{M} всегда можно прибавить $\text{grad } f$, где f — функция, обращающаяся в нуль вне системы. При рассмотрении электродинамики сплошных сред вектор \mathfrak{M} называется *вектором плотности намагниченности* системы токов. Из уравнений (7.17) следует, что действительно можно выбрать \mathfrak{M} таким образом, что область ненулевых значений плотности намагниченности \mathfrak{M} действительно ограничена в пространстве. Размер этой области по порядку величины совпадает с размером системы токов.

Поле \mathbf{H} , определяемое равенством

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathfrak{M}, \quad \text{rot } \mathbf{H} = 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = -4\pi \text{div } \mathfrak{M} \quad (5.54)$$

в электродинамике сплошных сред называется магнитным полем, тогда как ‘бывшее’ магнитное поле \mathbf{B} становится *магнитной индукцией*. Этот выбор наименований имеет под собой исторические причины, эта традиция сохраняется до настоящего времени. В результате этого выбора достигается формальная аналогия между парами полей $\{\mathbf{E}, \mathbf{P}\}$ (5.11) и $\{\mathbf{H}, \mathfrak{M}\}$.

В пустоте поле \mathbf{H} совпадает с полем \mathbf{B} . Поэтому если исследуется поле ограниченной в пространстве системы токов, то поле \mathbf{H} также является потенциальным вне системы токов и разложение в ряд (5.26) для него то же самое. Таким образом, потенциал магнитного поля φ_B удовлетворяет уравнению

$$\Delta \varphi_B = 4\pi \text{div } \mathfrak{M}, \quad \mathbf{H} = -\text{grad } \varphi_B \quad \text{for all } \mathbf{r}, \quad (5.55)$$

сравни формально аналогичные уравнения (5.1,5.11) для электрического поля.

Для дальнейшего исследования нестационарных полей удобно представить статическое магнитное поле также в виде

$$\mathbf{B} = \text{rot rot } (\mathbf{r}\chi) - \frac{4\pi}{c} \text{rot } (\mathbf{r} \partial_t \eta_{\mathfrak{M}}),$$

Уравнения на скалярные функции $\chi, \eta_{\mathfrak{M}}$ суть

$$\Delta \Delta_a \chi = \frac{4\pi}{c} \text{div } [\mathbf{r} \times \mathbf{j}], \quad \Delta_a \partial_t \eta_{\mathfrak{M}} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}) \quad (5.56)$$

т.е. функция $\eta_{\mathfrak{M}}$ обращается в нуль вне системы, где магнитное поле полностью описывается скалярной функцией χ , а оператор Δ_a определён в (7.14). Таким образом, потенциалы χ и φ_B заменяют друг друга, и должны

быть однозначно связаны между собой:

$$\varphi_B = - \int \frac{d^3 r' \text{div } \mathfrak{M}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (5.57)$$

$$\Delta_a \chi = - \frac{1}{c} \int \frac{d^3 r' \text{div } [\mathbf{r}' \times \mathbf{j}']}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = r \partial_r \varphi_B + 4\pi (\mathbf{r} \cdot \mathfrak{M}),$$

где выражение для потенциала χ следует из (7.17).

Можно проверить, что дипольный вклад в потенциалы действительно совпадает с уже найденным (5.32) и определяется магнито-дипольным моментом $\boldsymbol{\mu}$ (5.31). Проводя процедуру разложения (5.57) до следующего порядка, можно получить выражение для магнито-квадрупольного момента

$$\mathfrak{m}^{ik} = \frac{1}{2} \int d^3 r r^i r^k \text{div } \frac{[\mathbf{r} \times \mathbf{j}]}{2c}. \quad (5.58)$$

5.4.2 Поле системы нестационарных токов

Выражение (4.20) для запаздывающих потенциалов связывает 4-потенциал в калибровке Лоренца с пространственно-временным распределением зарядов и токов в системе. По найденному 4-потенциалу возможно найти электромагнитное поле. Однако даже при наложении условия калибровки Лоренца, в 4-потенциале остаётся три независимых функции времени и координат. Электромагнитное поле в пустоте определяется всего двумя функциями времени и координат, поскольку для плоской волны существуют всего две поляризации. Поэтому одна из трёх функций, параметризующих 4-потенциал в калибровке Лоренца, является избыточной и лишней с точки зрения нашей цели — нахождения электромагнитного поля вне системы.

Удобнее выбрать две независимые функции, соответствующие сферической геометрии задачи. Воспользуемся математическим аппаратом, развитым в § 7.2, где описан метод разложения бездивергентного поля по сферическим гармоникам. Вне системы мы параметризуем электромагнитное поле функциями η, χ , удовлетворяющими волновому уравнению (4.38)

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \text{rot } (\mathbf{r} \partial_t \chi) + \text{rot rot } (\mathbf{r}\eta) - \quad (5.59)$$

$$-4\pi \left(\mathbf{P} + \text{rot } \left(\frac{\mathbf{r} \partial_t \chi_P}{c} - \text{rot } (\mathbf{r}\eta_P) \right) \right) - \text{grad } \frac{Q}{r} =$$

$$= \mathbf{E}_{\text{grad}} + \mathbf{E}_P,$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \text{rot } (\mathbf{r} \partial_t \eta) + \text{rot rot } (\mathbf{r}\chi) -$$

$$- \frac{4\pi}{c} \text{rot } (\mathbf{r} \partial_t (\eta_{\mathfrak{M}} + \eta_P)) = \mathbf{B}_{\text{grad}} + \mathbf{B}_P,$$

см. (7.18). Функция η является скаляром в трёх-мерном пространстве, тогда как χ является псевдо-скаляром.

Эти функции параметризуют поле $\mathbf{E}_{\text{rad}}, \mathbf{B}_{\text{rad}}$ вне системы. Внутри тела добавляется электромагнитное поле $\mathbf{E}_P, \mathbf{B}_P$, исчезающее вне тела. Оно параметризуется дополнительными скалярными полями $\chi_P, \eta_{\mathfrak{M}}, \eta_P$. Плотность поляризации \mathbf{P} удовлетворяет уравнению

$$\rho = Q\delta(\mathbf{r}) - \text{div } \mathbf{P}, \quad \mathbf{j} - \partial_t \mathbf{P} = c \text{rot } \mathfrak{M}. \quad (5.60)$$

где Q — полный заряд системы. В дальнейшем мы полагаем, что полный заряд системы $Q = 0$. Мы также определили плотность намагниченности \mathfrak{M} . Как и раньше, определения плотностей поляризации \mathbf{P} и \mathfrak{M} не являются однозначными процедурами.

5.4.2.1 Поле вне тела

Уравнения Максвелла, записанные в терминах введённых параметризующих электромагнитное поле функций, выглядят следующим образом:

$$\text{rot}(\mathbf{r}\square\chi) = 4\pi \text{rot} \left(\left(\mathfrak{M} + \frac{\text{rot}(\mathbf{r}\partial_t\eta_{\mathfrak{M}})}{c} \right) - \mathbf{r} \frac{\partial_t^2 \chi_P}{c^2} \right),$$

$$\text{rot}(\mathbf{r}\square(\eta + \eta_P)) = 4\pi \text{rot} \left(\left(\mathbf{P} + \frac{\text{rot}(\mathbf{r}\chi_P)}{c} \right) + \mathbf{r} \frac{\partial_t^2 \eta_{\mathfrak{M}}}{c^2} \right).$$

Проектируем сначала эти уравнения на \mathbf{r} , в результате чего найдём решения для вспомогательных функций $\chi_P, \eta_{\mathfrak{M}}$

$$\begin{aligned} \Delta_a \partial_t \eta_{\mathfrak{M}} &= c \text{div}[\mathfrak{M} \times \mathbf{r}] = c(\mathbf{r} \cdot \text{rot } \mathfrak{M}), \\ \Delta_a \partial_t \chi_P &= c \text{div}[\mathbf{P} \times \mathbf{r}]. \end{aligned}$$

сравни с (5.56), где оператор Δ_a , напомним, определён в (7.14). После этого выписываем решения для поля вне системы. Уравнение на функцию χ

$$\begin{aligned} \square \Delta_a \chi &= -\frac{4\pi}{c} (\mathbf{r} \cdot \text{rot}(c \text{rot } \mathfrak{M} + \partial_t \mathbf{P})) = \\ &= \frac{4\pi}{c} \text{div}[\mathbf{r} \times \mathbf{j}], \end{aligned} \quad (5.61)$$

отличается от уравнения (5.56) на эту функцию в статике только тем, что оператор Лапласа оказывается заменённым на оператор д'Аламбера. Уравнение на функцию η имеет более сложную структуру:

$$\begin{aligned} \square \Delta_a (\eta + \eta_P) &= -\frac{4\pi}{c} (\mathbf{r} \cdot \text{rot}(c \text{rot } \mathbf{P} - \partial_t \mathfrak{M})) = \\ &= 4\pi(2 + (\mathbf{r} \cdot \nabla))\rho + \frac{4\pi(\mathbf{r} \cdot \partial_t \mathbf{j})}{c^2} - 4\pi \square(\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}) \end{aligned} \quad (5.62)$$

Справа последнее слагаемое не даёт вклада в поле на далёких расстояниях от системы, соответственно полагаем

$$\eta_P = -\frac{4\pi}{\Delta_a} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{P})$$

а поле на далёких расстояниях определяется волновым уравнением

$$\square \Delta_a \eta = 4\pi(2 + (\mathbf{r} \cdot \nabla))\rho + \frac{4\pi \partial_t(\mathbf{r} \cdot \mathbf{j})}{c^2}. \quad (5.63)$$

Таким образом, часть поля, задаваемая η , определяется распределением зарядов в системе. Однако вклад того же рода дают особые конфигурации переменных во времени токов.

Предположим, что поле создаёт некоторый точечный источник; тогда мы всегда остаёмся вне создающей электромагнитное поле системы. При $r \rightarrow 0$ электрическое поле \mathbf{E} должно стремиться к статическому выражению (5.3). Пренебрегая временными производными, получаем

$$\mathbf{E} \approx \text{grad } \partial_r(r\eta), \quad \mathbf{B} \approx \text{grad } \partial_r(r\chi), \quad (5.64)$$

т.е. вблизи точечного источника

$$\partial_r(r\eta) \approx -\varphi, \quad \partial_r(r\chi) \approx -\varphi_B,$$

где φ и φ_B — электростатический и магнито-статический потенциалы системы; для магнитного потенциала равенство эквивалентно соотношению (5.57), взятому вне системы.

5.4.2.2 Поле внутри тела

Тогда как функции η, χ нам удалось выразить через компоненты 4-тока, часть поля, появляющаяся внутри системы и формально не имеющая запаздывания, оказалась выражена через плотности магнитного и магнитного момента, которые являются неоднозначно определёнными величинами. Однако само поле внутри системы является, разумеется, определённым однозначно. Для того, чтобы выразить его непосредственно через компоненты 4-тока, произведём переопределение полей \mathbf{P} и \mathfrak{M} согласно равенствам

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \partial_t \mathbf{P} + c \text{rot } \mathfrak{M} = \\ &= \partial_t (\mathbf{P} + \text{rot}(\mathbf{r}\chi_P) - c \text{rot } \text{rot}(\mathbf{r}\eta_{\mathfrak{M}})) \\ &\quad + c \text{rot} (\mathfrak{M} + \text{rot}(\mathbf{r}\partial_t \eta_{\mathfrak{M}}) - \mathbf{r}\chi_P) \equiv \\ &\equiv \partial_t \mathbf{P}_{\text{new}} + c \text{rot } \mathfrak{M}_{\text{new}}. \end{aligned}$$

При таком переопределении плотностей электрического и магнитного моментов вновь посчитанные функции $\chi_{P,\text{new}} = \eta_{\mathfrak{M},\text{new}} = 0$. Кроме того,

$$(\mathbf{r} \cdot \text{rot } \mathfrak{M}_{\text{new}}) = 0, \quad (\mathbf{r} \cdot \partial_t \mathbf{P}_{\text{new}}) = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}).$$

Считаем дополнительный вклад в электрическое поле, возникающий внутри тела:

$$\mathbf{E}_P = \text{rot } \text{rot}(\mathbf{r}\eta_{P,\text{new}}) - 4\pi \mathbf{P}_{\text{new}}, \quad \partial_t \eta_{P,\text{new}} = -\frac{4\pi}{\Delta_a} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j})$$

покомпонентно

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_P^r &= 0, & (\mathbf{r} \cdot \text{rot } \mathbf{E}_P) &= r \nabla_\alpha^* \mathbf{E}_P^\alpha = 0, \\ \text{div } \mathbf{E}_P &= \nabla_\alpha \mathbf{E}_P^\alpha = 4\pi\rho \end{aligned}$$

Теперь магнитное

$$\mathbf{B}_P = \frac{1}{c} \text{rot } (\mathbf{r} \partial_t \eta_{P,\text{new}})$$

Ниже ради более компактной записи мы будем работать в частотном представлении. Таким образом, j^μ есть комплексная амплитуда 4-тока на частоте ω .

5.4.3 Излучение магнитного типа

Посмотрим теперь, какие вклады лагут потенциалы η, χ дают в изученные в § 5.3 типы излучений. Начнём с излучения магнитного типа, которое определяется потенциалом χ . Действительно, χ является псевдо-скаляром в 3-х мерном пространстве. Поэтому этот потенциал может содержать в себе в качестве параметров компоненты псевдо-тензора магнито-мультипольного момента (см., например, ниже частный случай (5.67)).

Решением уравнения (5.61) является

$$\Delta_a \chi(t, \mathbf{r}) = -\frac{1}{c} \int \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \text{div}[\mathbf{r}' \times \mathbf{j}'], \quad (5.65)$$

где \mathbf{j}' берётся в точке \mathbf{r}' . Теорема суммирования (7.13) позволяет разложить расходящуюся сферическую волну χ (5.65) по сферическим гармоникам

$$\chi = \sum_{l=1}^{\infty} h_1^{(1)}(kr) \chi_l, \quad (5.66)$$

$$\chi_l = \frac{(-1)^{l+1}(2l+1)ik}{l(l+1)c} \int d^3r' j_l(kr') P_l(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') \text{div}[\mathbf{r}' \times \mathbf{j}']$$

причём положение наблюдателя должно быть вне системы, $r > a$, а единичные вектора $\mathbf{n}' = \mathbf{r}'/r'$ и $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$.

5.4.3.1 Магнито-дипольное излучение

Выделим в (5.66) первое слагаемое с $l = 1$, соответствующее магнито-дипольному излучению. Подставляя явное выражение для полинома Лежандра $P_l(\mu)$ и выполняя интегрирование по частям, получаем

$$\chi_1 = -ik^2(\boldsymbol{\mu}_k \cdot \mathbf{n}), \quad \chi = -(\boldsymbol{\mu}_k \cdot \nabla) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (5.67)$$

$$\mu_k^i = \int d^3r' \frac{[\mathbf{r}' \times \mathbf{j}']^i}{2c} \frac{3 \cdot j_1(kr')}{kr'}$$

Прямой проверкой можно убедиться, что восстановленное по (5.67) согласно (5.59) электромагнитное поле $\mathbf{E}_{\text{grad}}, \mathbf{B}_{\text{grad}}$ совпадает с полем гармонически колеблющегося магнитного диполя (5.48)

$$\boldsymbol{\mu} = 2 \text{Re } (\boldsymbol{\mu}_0 \exp(-i\omega t)),$$

если совершить замену $\boldsymbol{\mu}_0 \rightarrow \boldsymbol{\mu}_k$. Таким образом, полное магнито-дипольное излучение определяется обобщённым магнито-дипольным моментом $\boldsymbol{\mu}_k$ (5.67), который определяется не только распределением токов в системе, но и частотой колебаний тока. Когда длина волны становится велика (а частота соответственно мала), так что $ka \ll 1$, где a — размер системы, последний множитель под интегралом в (5.67) стремится к единице. В результате обобщённый магнито-дипольный момент $\boldsymbol{\mu}_k$ стремится к квази-статическому магнито-дипольному моменту $\boldsymbol{\mu}_0$ (5.31).

5.4.4 Излучение электрического типа

Поле излучения электро-мультипольного типа описывается потенциалом η , поскольку он является скаляром, как и электро-мультипольные моменты, являющиеся тензорами.

Аналогично разложению (5.66), решение волнового уравнения (5.63) на часть поля, соответствующую излучению электрического типа, можно представить в виде суммы расходящихся волн различной угловой симметрии:

$$\eta = \sum_{l=1}^{\infty} h_1^{(1)}(kr) \eta_l, \quad (5.68)$$

где

$$\begin{aligned} \eta_l = & \frac{(-1)^{l+1}(2l+1)ik}{l(l+1)} \int d^3r' j_l(kr') P_l(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') \times \\ & \times \left((2 + (\mathbf{r}' \cdot \nabla')) \rho' + \frac{\partial_t(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{j}')}{c^2} \right). \end{aligned} \quad (5.69)$$

Выражение (5.69) сложнее выражения (5.66) тем, что тогда как в (5.66) вносит вклад только одна комбинация компонент вектора тока \mathbf{j} , в выражение (5.69) вносят вклад две линейно независимые комбинации компонент тока — ρ и $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{j})$. Поэтому если 2^l -польное излучение магнитного типа определяется полностью значением обобщённого 2^l -польного магнитного момента (см. Пункт 5.4.3.1 для $l = 1$), то 2^l -польное излучение электрического типа в общем случае определяется двумя 2^l -польными линейно независимыми моментами.

Мы начнём с электро-дипольного излучения. Нам не известен способ физически осмысленного разделения выражения (5.69) на две линейно-независимые составляющие в общем виде. Поэтому мы ограничимся разложением выражения (5.69) в ряд по параметру ka , считая его малым, $ka \ll 1$, для того чтобы произвести указанное разделение для первых членов разложения.

5.4.4.1 Электро-дипольный момент

В слагаемом $l = 1$ правой части (5.69), соответствующем электро-дипольному излучению, учтём первый исчезающий порядок по малому параметру $ka \ll 1$. В результате получаем, что в круглой скобке подинтегрального выражения правой части (5.69) надо удерживать только первое слагаемое, и положить $j_l(kr') \rightarrow kr'/3$:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{2} \nabla_m \frac{e^{ikr}}{r} \int r'^m (2 + (\mathbf{r}' \cdot \nabla')) \rho' d^3 r' = \\ &= -(\mathbf{d}_0 \cdot \nabla) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad \eta_1 = -ik^2 (\mathbf{d}_0 \cdot \mathbf{n}), \end{aligned} \quad (5.70)$$

где комплексная амплитуда колебаний дипольного момента \mathbf{d}_0 определяется квази-статическим выражением (5.38, 5.44). Восстановленное согласно (5.59) электромагнитное поле $\mathbf{E}_{\text{rad}}, \mathbf{B}_{\text{rad}}$ совпадает с полем гармонически колеблющегося электрического диполя (5.45).

5.4.4.2 Тороидальный дипольный момент

Поправка по малому параметру $ka \ll 1$ к выражению (5.70) возникает только во втором порядке. Полное выражения, включающее основной вклад и поправку, равно

$$\eta_1 = -ik^2 ((\mathbf{d}_0 \cdot \mathbf{n}) + ik(\mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{n})), \quad (5.71)$$

где *тороидальный дипольный момент*

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_0 &= \int d^3 r' \left(\frac{ik}{5} r'^2 \rho' + \frac{1}{2c} (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{j}') \right) \mathbf{r}' = \\ &= \frac{1}{10c} \int d^3 r ((\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{r} - 2r^2 \mathbf{j}). \end{aligned} \quad (5.72)$$

Тороидальный момент обращается в нуль, если ток является потенциальным, $\mathbf{j} = -\text{grad } \varphi_j$. Это можно интерпретировать так, что тороидальный момент определяется только вихревыми токами. Заметим, что в этом порядке поправка к дипольному моменту оказалась равной нулю — такая поправка должна была бы зависеть только от объёмной плотности зарядов ρ . В более высоких порядках по малому параметру ka эту поправку следует ожидать (как она существует в выражении (5.67) для обобщённого магнито-дипольного момента $\boldsymbol{\mu}_k$ по сравнению с выражением для дипольного момента $\boldsymbol{\mu}_0$).

Рисунок — пространственное распределение бездивергентных токов, создающих тороидальный дипольный момент и не создающих магнитных дипольного и квадрупольного моментов.

Итак, мы определили те два независимых вектора — электро-дипольный момент \mathbf{d}_0 и тороидальный дипольный момент \mathbf{t}_0 , — которые определяют электро-дипольное излучение. Эти интегральные характеристики распределения токов в системе определяются разными (линейно независимыми) комбинациями компонент тока в системе.

Полная мгновенная интенсивность излучения системы как электро-диполь, так и тороидальный диполь, равна

$$I = \frac{2}{3c^3} \left| \ddot{\mathbf{d}} - \ddot{\mathbf{t}}/c \right|^2, \quad (5.73)$$

см. (5.43).

5.4.4.3 Анаполь

Точечным тороидальным дипольным моментом или анаполем, расположенным в начале координат, называют распределение токов в пространстве

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = c \text{rot rot} (\mathbf{t} \delta(\mathbf{r})). \quad (5.74)$$

Тороидальный дипольный момент (5.72) такой системы равен \mathbf{t} , тогда как все магнитные моменты равны нулю.

Сила и момент сил, действующих на анаполь со стороны ЭМ-поля...

5.4.4.4 Квадрупольный момент

Сравним ближне-польную асимптотику (5.64) с асимптотическим поведением функции Ганкеля (7.12). В результате заключаем, что

$$\eta_2 = -\frac{k^3}{12} D_0^{ik} n^i n^k, \quad \eta = \frac{D_0^{ik} \nabla_i \nabla_k e^{ikr}}{12 r}. \quad (5.75)$$

Второй порядок по малым параметрам (5.39) в решении уравнения (5.63) равен

$$\begin{aligned} \Delta_a \eta &= \frac{\nabla_i \nabla_k e^{ikr}}{2 r} \int r'^i r'^k (2 + (\mathbf{r}' \cdot \nabla')) \rho' d^3 r' + \\ &\quad - \frac{ike^{ikr}}{2cr} \int d^3 r' (\mathbf{j}' \cdot \text{grad}' r'^2) = \\ &= -\frac{\nabla_i \nabla_k e^{ikr}}{2 r} \int (3r'^i r'^k - \delta^{ik} r'^2) \rho' d^3 r' \end{aligned}$$

что совпадает с (5.75).

§5.5. Торможение излучением

Изложение ведётся в обозначениях § 4.6.

5.5.1 Скорость производства электромагнитной энергии уходящих волн

Поле, произведённое движущейся с ускорением частицей, уносит энергию и импульс. Пусть за время движения частицы dt_r (иногда время t_r называют также “ретардированное”) была рождена группа волн с 4-импульсом

$$\|dP_r^\mu\| = \{dE_r/c, d\mathbf{P}_r\}.$$

Вообще говоря, из соображений закона сохранения энергии-импульса эти энергия и импульс должны быть равны изменению $dp^\mu = \{dE/c, d\mathbf{p}\}$ энергии и импульса частицы, взятым с обратным знаком. Тем не менее, в классической (неквантовой) электродинамике как в теории есть встроенное противоречие, которое как раз в данном вопросе даёт о себе знать. А именно, электромагнитная энергия точечного заряда равна бесконечности. В результате в обоих частях равенства, выражающего сохранение энергии-импульса, присутствует бесконечный вклад, и его сокращение в общем случае некорректно.

Пусть частица влетает, а затем вылетает из области, где электромагнитное поле отлично от нуля. Тогда для 4-импульса имеет место только интегральное условие сохранения

$$\int dP_r^\mu + \int \left(dp^\mu - \frac{e}{c} F^{\mu\nu} dx_\nu \right) = 0, \quad (5.76)$$

где интеграл берётся вдоль мировой линии; на концах участка интегрирования сокращение бесконечной электромагнитной энергии точечной частицы корректно, поскольку она движется равномерно и прямолинейно. В (5.76) $F^{\mu\nu}$ — внешнее электромагнитное поле, из которого исключено поле излучения рассматриваемой частицы. Равенство (5.76) выражает полный баланс энергии-импульса, см. в том числе уравнение Лоренца (3.34). Без знаков интеграла это равенство в рамках классической электродинамики в общем случае неверно.

Пусть траектория частицы известна. Покажем здесь, что скорость производства энергии W уходящих электромагнитной волн движущегося с ускорением заряда является релятивистским инвариантом, так что изменение энергии-импульса волн

$$dP_r^\mu = \frac{W}{c^2} dz^\mu, \quad W = \frac{dE_r}{dt_r} = -\frac{2ce^2}{3} w^\nu w_\nu, \quad (5.77)$$

где w^μ — 4-ускорение частицы, а z — траектория частицы, а t_r — время движения частицы, в соответствии с обозначениями этого параграфа.

Для доказательства перейдём в систему координат K' , в которой в момент t'_r заряд покоится. Рассмотрим

ту часть уходящего излучения, которая была произведена окрестностью этого момента. Зафиксируем момент наблюдения $t' > t'_r$. Согласно (4.56), электрическое поле этой части излучения на сфере $|\mathbf{r}' - \mathbf{z}'(t'_r)| = c(t' - t'_r)$ описывается выражениями

$$\mathbf{E}'_{\text{rad}}(\mathbf{r}') = \frac{e[\mathbf{n}' \times [\mathbf{n}' \times \mathbf{a}']]}{c^2 R'}, \quad \mathbf{B}'_{\text{rad}} = \frac{e[\mathbf{a}' \times \mathbf{n}']}{c^2 R'}, \quad (5.78)$$

соответствующими радиационным вкладом в (5.40,5.41), поскольку в нашем случае $\mathbf{R}'_0 = \mathbf{R}'$. Интенсивность уходящего излучения определяется соответственно (5.43),

$$W = \frac{dE'_r}{dt'_r} = \frac{2e^2 \mathbf{a}'^2}{3c^3}, \quad dP_r'^0 = \frac{dE'_r dt'_r}{c} = \frac{W}{c} dt'_r.$$

Пространственные компоненты $dP_r'^i$ полного импульса рассматриваемой порции электромагнитных волн равны нулю, в силу симметрии интенсивности излучения: сколько импульса уходит в направлении \mathbf{n}' , столько и в обратном направлении $-\mathbf{n}'$. Таким образом, порция волн, испущенная за промежуток времени dt'_r , обладает 4-импульсом

$$dP_r'^\mu = \{dE'_r/c, \vec{0}\} = \frac{W}{c^2} dz'^\mu.$$

Вторым равенством мы переписали правую часть в релятивистско-инвариантном виде через единственный имеющийся в нашем распоряжении 4-вектор с нулевой пространственной частью — приращение 4-координаты dz'^μ . Коэффициент пропорциональности между двумя 4-векторами является релятивистским инвариантом, т.е. релятивистским инвариантом является скорость производства энергии уходящего излучения:

$$W = \frac{2e^2 \mathbf{a}'^2}{3c^3} = -\frac{2ce^2}{3} w^\nu w_\nu. \quad (5.79)$$

Таким образом, мы пришли к формуле (5.77).

5.5.2 Торможение излучением

В работе Клепиков, 1985 подробно разобрана история вопроса.

Найдем теперь силу, действующую на ускоренно движущуюся частицу со стороны излучённого ею поля. Эту силу называют *силой торможения излучением* или *лоренцевской силой трения* (*Abraham–Lorentz force (also Lorentz–Abraham force), or the radiation reaction force, or the self force*). Как мы упоминали в Пункте 5.5.1, мгновенная мощность генерации уходящих волн не совпадает с мгновенной мощностью, отбираемой от частицы.

Мы рассматриваем часть мировой линии движения частицы, на котором в начале и в конце частица двигалась без ускорения, т.е. была вне действия внешнего электромагнитного поля. Либо, мы рассматриваем один

период периодического движения частицы, так что вначале и в конце движения скорость частицы и все её производные равны друг другу.

Сначала рассмотрим нерелятивистскую частицу, и обозначим искомую силу \mathbf{F}_{Lf} . Полный баланс энергии должен сохраняться, так что

$$\int (\mathbf{F}_{\text{Lf}} \cdot \mathbf{v}) dt = - \int W dt = - \frac{2e^2}{3c^3} \int \dot{\mathbf{v}}^2 dt = \frac{2e^2}{3c^3} \int (\ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}) dt, \quad (5.80)$$

где скорость производства электромагнитной энергии уходящих волн W определяется (5.77). В последнем равенстве мы провели интегрирование по частям, пользуясь тем, что граничный вклад равен нулю, поскольку на концах мы предполагаем равномерное и прямолинейное движение (либо граничные члены сократились, если движение периодически). Из последнего равенства можно сделать вывод, что в уравнение движения следует добавить силу торможения излучением \mathbf{F}_{Lf} ,

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] + \mathbf{F}_{\text{Lf}}, \quad \mathbf{F}_{\text{Lf}} = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}. \quad (5.81)$$

Вообще говоря, в данном выводе мы могли упустить вклад в силу, нормальный к направлению скорости частицы. Однако такого вклада существовать не может. Покажем это. Перейдём в систему отсчёта, двигающуюся со скоростью \mathbf{V} (предполагаем, что скорость мала, так что преобразование Лоренца есть преобразование Галилея) такую, чтобы интеграл от неучтённой части силы имел ненулевую проекцию на \mathbf{V} . В этом случае баланс энергии (5.80), записанный в новой системе отсчёта, уже не будет выполняться. Вклад же, который представлял бы из себя полную производную, и от которого кроме того интеграл был бы равен нулю, составить из скорости и её производных невозможно.

5.5.2.1 Применимость концепции силы торможения излучением

В уравнении движения (5.81) сила торможения \mathbf{F}_{Lf} должна быть мала по сравнению с первыми двумя вкла-

дами, возникающими из-за действия внешнего электромагнитного поля. Действительно, в противном случае мы получили бы уравнение типа

$$\dot{\mathbf{v}} = \alpha \ddot{\mathbf{v}}, \quad \alpha > 0,$$

которое даёт “самоускорение” частицы.

Получим условия применимости уравнения движения нерелятивистского заряда со включённой силой лоренцевского трения. Будем исходить из требования, чтобы изменение энергии ΔE_{rad} частицы в силу действия лоренцевской силы трения за время Δt было мало по сравнению с изменением ΔE_{kin} кинетической энергии частицы под действием внешнего электромагнитного поля. Время Δt может быть характерным временем изменения либо направления движения частицы, либо её ускорения — т.е. в этом случае временем изменения электромагнитного поля, действующего на частицу. Имеем:

$$\Delta E_{\text{rad}} \sim \frac{2e^2 \dot{\mathbf{v}}^2 \Delta t}{3c^3} = \frac{2e^2 \dot{\mathbf{v}} \Delta \mathbf{v}}{3c^3}, \quad \Delta E_{\text{kin}} \sim m \mathbf{v} \Delta \mathbf{v}.$$

Наше требование приводит нас к неравенству

$$\frac{\Delta E_{\text{rad}}}{\Delta E_{\text{kin}}} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta t \sim \frac{v}{|\dot{\mathbf{v}}|} \gg \frac{r_0}{c},$$

где r_0 — классический радиус электрона (5.15). Выразим это условие в терминах электромагнитного поля. Условие на магнитное поле \mathbf{B} можно получить, если в (5.81) положить электрическое поле равным нулю и потребовать условия $|\dot{\mathbf{v}}|/v \ll c/r_0$. Второе условие заключается в том, чтобы само поле менялось не слишком быстро, на временах $\Delta t \gg r_0/c$. Эти условия можно записать в виде

$$r_0 eB \ll mc^2, \quad \lambda \gg r_0, \quad (5.82)$$

где $\lambda \sim c/\Delta t$ — характерная длина волны падающего на частицу электромагнитного поля. Таким образом, поле не должно быстро меняться и не должно быть слишком большим по амплитуде.

Часть IV APPENDIX

Глава 6

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

§6.1. Тензорное исчисление

Рекомендуемая дополнительная литература: Корнев, 2000.

Рассмотрим линейное d -мерное пространство \mathcal{L} над полем действительных чисел. Каждый вектор \mathbf{x} этого линейного пространства может быть представлен в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 x^1 + \dots + \mathbf{e}_d x^d \equiv \mathbf{e}_\mu x^\mu, \quad (6.1)$$

где индекс μ пробегает значения $\{1, \dots, d\}$, \mathbf{e}_μ — базисные вектора некоторого базиса в этом линейном пространстве, x^μ — набор вещественных чисел, которые мы будем называть координатами вектора \mathbf{x} . Равенство (6.1) переписано второй раз с использованием соглашения Эйнштейна (*Einstein notation or Einstein summation convention*). Это соглашение заключается в том, что если в выражении дважды повторяется индекс, записанный вверху и внизу, то подразумевается суммирование по всем допустимым значениям этого индекса, если не оговорено противного. Эта операция суммирования называется также *свёрткой*.

Предположим, что мы производим линейное преобразование базиса. От старого базиса \mathbf{e}_μ мы переходим к новому \mathbf{e}'_ν согласно правилу

$$\mathbf{e}'_\nu = \mathcal{D}'^\mu_\nu \mathbf{e}_\mu. \quad (6.2)$$

где по повторяющемуся индексу μ согласно соглашению Эйнштейна производится суммирование от 1 до d . Величина \mathcal{D} , представляет из себя матрицу $d \times d$. Набор векторов \mathbf{e}'_μ является базисом в том случае, если детерминант детерминант \mathcal{D} , не ноль, то есть матрица не вырождена. Мы всегда будем это предполагать.

В новом базисе вектор \mathbf{x} имеет координаты x'^μ , которые связаны с координатами в старом базисе через обратную матрицу \mathcal{D}' :

$$x'^\mu = \mathcal{D}'^\mu_\nu x^\nu, \quad \mathcal{D}'^\mu_\nu \mathcal{D}'^\lambda_\mu = \delta^\lambda_\nu. \quad (6.3)$$

Здесь δ^λ_ν — символ Кронекера (*Kronecker symbol*), равный единице, если значения его индексов совпадают (в данном случае если $\lambda = \nu$), и нулю в противном случае.

Вектор \mathbf{x} становится осязаемым только в случае, если заданы его координаты x^μ . Поэтому более практич-

ным определением вектора является следующее: совокупность d чисел x^μ называют вектором, если при переходе от одного базиса к другому (мы будем говорить о том же самом как о переходе от одной системы координат к другой) этот набор преобразуется по закону (6.3).

6.1.1 Контравариантные и ковариантные вектора

Вектора, преобразующиеся по закону (6.3), называют *контравариантными векторами*. Более общо, вектор x^μ называют тензором первого ранга типа (0,1).

По определению, тензора являются элементами линейного пространства размерности d^2 , мы будем их обозначать как $F^{\mu\nu}$, $M^{\mu\nu}$, $T^{\mu\nu}$: каждый индекс пробегает по-прежнему d значений, поэтому всего матричных элементов у тензора второго ранга оказывается как раз d^2 штук. Пример тензора второго ранга $F^{\mu\nu}$ типа (0,2) можно построить из двух векторов (т.е. тензоров первого ранга) как прямое произведение,

$$F^{\mu\nu} = x^\mu y^\nu; \quad \text{пусть например } T^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} + M^{\mu\nu}. \quad (6.4)$$

В общем случае произвольный тензор второго ранга $T^{\mu\nu}$ невозможно представить в виде произведения двух векторов (6.4), как это сделано для $F^{\mu\nu}$, поскольку в $T^{\mu\nu}$ содержится d^2 независимых параметров, тогда как в двух векторах независимых параметров всего $2d$. Тем не менее, построение (6.4) показывает, что для тензора второго ранга должно иметь место правило преобразования

$$F'^{\mu\nu} = \mathcal{D}'^\mu_\rho \mathcal{D}'^\nu_\lambda F^{\rho\lambda}. \quad (6.5)$$

6.1.1.1 Ковариантные тензора

Рассмотрим линейные функции на векторах: каждому вектору такая функция ставит в соответствие число. Такие функции образуют линейное пространство \mathcal{L}^* размерности d , его элементы называют ковариантными векторами. Если в пространстве \mathcal{L} выбран базис, то контравариантный вектор $\alpha \in \mathcal{L}^*$ определяется набором d

чисел α_μ , так что его действие на векторе \mathbf{x} равно

$$\alpha(\mathbf{x}) = \alpha_\mu x^\mu. \quad (6.6)$$

Это число не должно зависеть от выбранного базиса. Из (6.3,6.7) вытекает, что при преобразовании базиса этот набор преобразуется по правилу

$$\alpha'_\mu = \mathcal{D}'^\nu_\mu \alpha_\nu. \quad (6.7)$$

совпадающему с правилом (6.2) для величины также с нижним индексом, и аналогичному правилу (6.7) для величины, у которой более одного нижнего индекса.

Набор d величин, преобразующихся по закону (6.6), называют *ковариантными векторами* (или, тензорами первого ранга типа (1,0)), в отличие от контравариантных векторов.

По аналогии с тем, как был построен тензор второго ранга типа (0,2), можно построить тензор второго ранга типа (2,0) по правилу

$$H_{\sigma\varsigma} = \alpha_\sigma \beta_\varsigma, \quad H'_{\sigma\varsigma} = \mathcal{D}'^\nu_\sigma \mathcal{D}'^\mu_\varsigma H_{\mu\nu}.$$

Далее, можно построить и тензор второго ранга смешанного типа (1,1), согласно правилу

$$J^\sigma_\varsigma = x^\sigma \beta_\varsigma, \quad H'_{\sigma\varsigma} = \mathcal{D}'^\sigma_\nu \mathcal{D}'^\mu_\varsigma H^\nu_\mu. \quad (6.8)$$

Как $H_{\sigma\varsigma}$, так и J^σ_ς являются элементами (разных) линейных пространств размерности d^2 .

Вообще, величины, имеющие более одного индекса, и преобразующиеся по законам (6.3,6.10) или (6.7), называются соответственно контравариантными и ковариантными тензорами ранга, равного сумме верхних (контравариантных) и нижних (ковариантных) индексов. Расширение описанных правил на тензора более высокого ранга прямолинейно.

6.1.1.2 Скаляры

Скаляром называют величину, значение которой не зависит от выбранного базиса. Таким образом, действие ковариантного вектора на контравариантном есть скаляр. Другим примером построения скаляра является след тензора второго ранга типа (1,1):

$$\varphi = F^\mu_\mu.$$

Формально, скаляр является тензором нулевого ранга.

6.1.2 Метрика

Определим невырожденную квадратичную форму g , называемую *метрикой*, которая каждой паре векторов \mathbf{x}, \mathbf{y} ставит в соответствие число, называемое *скалярным произведением*,

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \equiv g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu, \quad g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}, \quad (6.9)$$

где $g_{\mu\nu}$ — совокупность $d(d-1)/2$ чисел, определяющих квадратичную форму g в данном базисе. Скалярное

произведение $g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$ по нашей задумке должно зависеть только от выбранных метрики и векторов \mathbf{x}, \mathbf{y} , но не должно зависеть от выбранной системы координат (выбранного базиса). Таким образом, метрика является тензором типа (2,0), и потому преобразуется согласно правилу

$$g'_{\mu\nu} = \mathcal{D}'^\rho_\mu \mathcal{D}'^\lambda_\nu g_{\rho\lambda}. \quad (6.10)$$

сравни с (6.5,6.8).

Метрика является выделенной билинейным симметричным ковариантным тензором второго ранга (типа (2,0)). Если введена метрика, то устанавливается взаимно-однозначное соответствие между контравариантными и ковариантными. Пусть \mathbf{x}, \mathbf{y} — вектора линейного пространства \mathcal{L} . Каждому контравариантному вектору x^μ можно поставить во взаимно однозначное соответствие ковариантный вектор x_μ , являющийся линейной функцией на \mathcal{L} , по правилам

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu, \quad x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu, \quad (6.11)$$

$$g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x_\mu y^\mu = x^\mu y_\mu, \quad \|g^{\mu\nu}\| = \|g_{\mu\nu}\|^{-1}.$$

Мы ввели матрицу, обратную матрице метрического тензора. Обратный метрический тензор $g^{\mu\nu}$ преобразуется по закону (6.10). Операции (6.11) называют *операциями опускания и поднятия индекса*.

Тензор F^μ_ν можно поставить в соответствие тензору $F^{\mu\nu}$ и $F_{\mu\nu}$, проведя операции поднятия и опускания индекса согласно (6.11):

$$F^\mu_\nu = g_{\nu\lambda} F^{\mu\lambda}, \quad F_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda} F^\lambda_\nu.$$

Построенные величины будут преобразовываться по правилам (6.10) и (6.7) соответственно. Поскольку взаимное соответствие всех трёх тензоров однозначно, о них всех вместе взятых говорят просто как о тензоре F .

6.1.2.1 Пример метрики: евклидово пространство

В качестве первого примера метрики рассмотрим евклидово пространство. *Евклидово пространство* (*Euclidean space*) — это линейное пространство с введённой на нём метрикой такой, что существует базис \mathbf{e} , в котором метрика в матричном представлении является единичной матрицей,

$$\|g_{ik}\| = \text{diag}(1, \dots, 1), \quad \Leftrightarrow \quad g_{ik} = \delta_{ik}. \quad (6.12)$$

Вместо индексов из букв греческого алфавита $\{\mu, \nu, \lambda, \dots\}$ мы используем индексы из букв латинского алфавита $\{i, j, k, l, \dots\}$, если речь идёт о евклидовом пространстве с введённым базисом, где метрика имеет канонический вид (6.12).

В евклидовом пространстве действие метрики как квадратичной формы для двух векторов \mathbf{x}, \mathbf{y} представляет из себя известное в физике скалярное произведение:

$$g_{ik} x^i x^k \equiv (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^d x^i y^i. \quad (6.13)$$

В евклидовом пространстве существует целое множество базисов, в которых метрика является единичной матрицей. Все такие базисы называются *Декартовыми системами координат* (*Cartesian coordinate system*). Переход от одного базиса к другому производится с помощью ортогональной матрицы,

$$x'^i = \mathcal{O}^i_k x^k, \quad \mathcal{O}^i_k \mathcal{O}^l_k = \mathcal{O}^k_i \mathcal{O}^k_l = \delta^{il}. \quad (6.14)$$

Для того, чтобы отличать ортогональную матрицу от произвольной матрицы перехода, мы обозначили её \mathcal{O} , так что $\mathcal{D}' \equiv \mathcal{O}$. Для ортогональной матрицы равенство (6.7) сохраняет метрику (6.12).

Для евклидова пространства допускается нарушение соглашения Эйнштейна в том смысле, что повторяющиеся индексы, по которым происходит суммирование, могут одновременно быть нижними или верхними. Причина состоит в том, что тензора с верхними и нижними индексами не отличаются друг от друга, см. Пункт 6.1.1.

6.1.2.2 Пример метрики: пространство Минковского

Пространство Минковского (*Minkowski space or Minkowski spacetime*) — это 4-х мерное линейное пространство с введённой на нём метрикой, такой, что существует базис \mathbf{e} , в котором метрика в матричном представлении имеет вид

$$\|g_{\mu\nu}\| = \text{diag}(1, -1, -1 \dots, -1), \quad (6.15)$$

то есть метрика диагональна, первый элемент равен 1, а все остальные -1 .

Если рассматривается пространство Минковского, то для индексов принято производить счёт начиная с нуля, так что $\{\mu, \nu, \dots\} = \{0, 1, \dots, d-1\}$. В соответствии с физическим смыслом, нулевая компонента называется также временной компонентой, а остальные компоненты — пространственными. Если есть желание выделить пространственные компоненты, то используют индексы из букв латинского алфавита $\{i, j, k, \dots\}$.

В пространстве Минковского действие метрики как квадратичной формы имеет вид

$$g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^0 y^0 - \sum_{i=0}^{d-1} x^i y^i \equiv x^0 y^0 - x^i y^i. \quad (6.16)$$

Матрицу преобразования \mathcal{D}' , которая сохраняет метрику (6.15), мы будем обозначать символом Λ' и называть матрицей преобразования Лоренца, а само преобразование — преобразованием Лоренца. Таким образом, если Λ' — матрица преобразования Лоренца и метрика g есть метрика Минковского (6.15), то

$$g_{\mu\nu} = \Lambda'^{\lambda}_{\mu} \Lambda'^{\rho}_{\nu} g_{\lambda\rho}. \quad (6.17)$$

6.1.3 Полностью антисимметричный псевдотензор

Символ Леви-Чивиты ϵ (*Levi-Civita symbol*) для d -мерного пространства имеет d индексов. Не имеет значения, называть их верхними или нижними, поскольку символ Леви-Чивиты не является тензором. По определению, его матричный элемент

$$\epsilon_{12\dots d} = 1. \quad (6.18)$$

в любой системе отсчёта. При перестановке любых двух индексов значение символа меняет знак. Таким образом, в частности, если значение хоть одной пары его индексов совпадает, то соответствующий матричный элемент символа равен нулю.

Покажем, что величина \mathfrak{E} , определённая согласно равенству

$$\mathfrak{E}_{\mu\dots\nu} = \sqrt{|g|} \epsilon_{\mu\dots\nu}, \quad g = \det \|g_{\lambda\rho}\| \quad (6.19)$$

является *псевдотензором*. Псевдотензором в общем случае мы называем объект, который ведёт себя как тензор какого-либо ранга и в дополнение к этому меняет знак, если детерминант матрицы перехода \mathcal{D}' отрицателен. Величину (6.19) мы будем называть полностью антисимметричным псевдотензором.

Действительно, посмотрим как совокупность величин (6.19) преобразуется при переходе из одной системы координат в другую, если считать её тензором ранга $(0, d)$:

$$\mathfrak{E}'_{\mu\dots\nu} \rightarrow \mathcal{D}'^{\rho}_{\mu} \dots \mathcal{D}'^{\lambda}_{\nu} \mathfrak{E}_{\rho\dots\lambda} = \sqrt{|g|} \mathcal{D}'^{\rho}_{\mu} \dots \mathcal{D}'^{\lambda}_{\nu} \epsilon_{\rho\dots\lambda}.$$

Свертка символа Леви-Чивиты с d матрицами \mathcal{D}_r есть детерминант этой матрицы помноженный на символ Леви-Чивиты (для доказательства следует сопоставить определения детерминанта и символа Леви-Чивиты). С другой стороны, поскольку правая часть (6.10) представляет из себя произведение трёх матриц \mathcal{D}_r , $\|g_{\mu\nu}\|$ и снова \mathcal{D}_r , то

$$\det \|g'_{\mu\nu}\| = (\det \mathcal{D}_r)^2 \det \|g_{\mu\nu}\|.$$

В итоге получаем, что

$$\mathfrak{E}'_{\mu\dots\nu} \rightarrow \sqrt{|g|} \det \mathcal{D}_r \epsilon_{\mu\dots\nu} = \text{sign}(\det \mathcal{D}_r) \sqrt{|g'|} \epsilon_{\mu\dots\nu}.$$

Таким образом, если детерминант матрицы перехода положителен, то преобразование \mathfrak{E} как тензора типа $(d, 0)$ согласуется с его определением (6.19). Если же детерминант матрицы перехода отрицателен, результат преобразования по правилу тензора отличается от определения (6.19) знаком. В соответствии с определением (6.19), в этом случае при переходе в новую систему координат \mathfrak{E} меняет знак в добавок к преобразованию по типу тензора $(d, 0)$.

Действуя аналогично можно показать, что полностью антисимметричный псевдотензор с верхними индексами равен

$$\mathfrak{E}^{\mu\dots\nu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \epsilon^{\mu\dots\nu}. \quad (6.20)$$

Любое произведение полностью антисимметричного псевдотензора на просто тензор (по схеме (6.4)) есть

псевдотензор. Произведение двух псевдотензоров есть просто тензор.

§6.2. Евклидово пространство

Рассмотрим евклидово пространство и базис в нём такой, что в этом базисе метрика является единичной матрицей, см. Пункт 6.1.2.1:

$$g_{ik} = \delta_{ik}. \quad (6.21)$$

В этом случае базис называется *Декартовой системой координат* (*Cartesian coordinate system*). Переход во все другие Декартовы системы координат осуществляется с помощью ортогональных преобразований. Если в системе K у вектора \mathbf{x} были координаты x^k , то в системе K' координаты этого вектора

$$x'^i = \mathcal{O}^i_k x^k, \quad \mathcal{O}^k_i \mathcal{O}^k_l = \delta_{il}. \quad (6.22)$$

Здесь матрица \mathcal{O} — матрица ортогонального поворота; второе равенство в (6.22) представляет из себя условие на то, чтобы матрица $\hat{\mathcal{O}}$ была ортогональной. В дальнейшем мы в этом параграфе будем рассматривать только ортогональные переходы от одного базиса к другому.

В евклидовом пространстве компоненты ковариантного вектора совпадают с компонентами контравариантного вектора, см. (6.11), поэтому нет смысла различать нижние и верхние индексы. Соглашение Эйнштейна, таким образом, не требует, чтобы два повторяющихся индекса, по которым производится суммирование, были один сверху, а другой сверху. Они могут быть на любых позициях. Обозначая вектора в евклидовом пространстве, мы, тем не менее, будем по возможности писать их индексы сверху.

6.2.1 Скалярное произведение векторов

Здесь мы частично повторяем то, что было сказано в Пункте 6.1.2.1.

Скалярное произведение $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ в евклидовом пространстве двух векторов \mathbf{a}, \mathbf{b} в декартовой системе координат определяется как

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = a^i b^i. \quad (6.23)$$

Наоборот, если скалярное произведение в евклидовом пространстве (которое не зависит от системы отсчёта) в некоторой системе координат определяется согласно (6.23), то эта система отсчёта называется декартовой.

Модуль вектора, определённый согласно равенству

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})} \quad (6.24)$$

в евклидовом пространстве обладает свойством нормы, то есть выполняются неравенство треугольника и линейное свойство:

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|, \quad |\varphi \mathbf{a}| = |\varphi| |\mathbf{a}|, \quad |\mathbf{a}| \geq 0,$$

где φ — действительное число.

6.2.2 Аксиальный вектор в 3-х мерном пространстве

В этом Пункте мы рассматриваем трёхмерное пространство, то есть $d = 3$.

Сперва отметим, что поскольку метрика у нас является единичной матрицей, и мы рассматривает только ортогональные преобразования, то антисимметричный псевдотензор совпадает с символом Леви-Чивиты,

$$\mathfrak{E}_{ikl} = \epsilon_{ikl},$$

см. Пункт 6.1.3.

Рассмотрим антисимметричный тензор второго ранга \mathbf{V}^{ik} :

$$\mathbf{V}^{ik} = -\mathbf{V}^{ki}.$$

Поскольку мы рассматривает 3-х мерное пространство, то у такого тензора имеется всего три независимые компоненты. Поставим этому тензору в соответствие псевдо-вектор

$$\mathbf{V}^n = \frac{1}{2} \epsilon_{nik} \mathbf{V}^{ik}, \quad \mathbf{V}^{ik} = \epsilon_{ikn} \mathbf{V}^n. \quad (6.25)$$

Псевдо-вектора также называют *аксиальными векторами* (*pseudovector or axial vector*), в отличие от обычных векторов, которые называют *истинными или полярными векторами* (*true or polar vector*). Аксиальные вектора преобразуются также, как и радиальные, если ортогональное преобразование содержит в себе только ортогональный поворот. Если же ортогональное преобразование содержит в себе также операцию пространственной инверсии, то аксиальный вектор вдобавок меняет знак.

В матричном виде связь компонент тензора \mathbf{V}^{ik} и аксиального вектора \mathbf{V}^n выглядит следующим образом:

$$\|\mathbf{V}^{ik}\| = \downarrow_i \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{V}^z & -\mathbf{V}^y \\ -\mathbf{V}^z & 0 & \mathbf{V}^x \\ \mathbf{V}^y & -\mathbf{V}^x & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.26)$$

Ещё раз подчеркнём, что если в составе ортогонального преобразования нет операции инверсии, то закон преобразования (6.10), применённый для тензора \mathbf{V}^{ik} эквивалентен преобразованию (6.3) для аксиального вектора \mathbf{V}^i .

6.2.2.1 Векторное произведение

Пусть нам даны два радиальных вектора a^i и b^i . Поставим им в соответствие аксиальный вектор d^i

$$d^i = \epsilon_{ikl} a^k b^l, \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{d} = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]. \quad (6.27)$$

Вектор \mathbf{d} называется *векторным произведением* векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} (*cross product of \mathbf{a} and \mathbf{b}*). Если среди векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} один радиальный, а другой аксиальный, то их векторное произведение будет радиальным вектором. В силу свойств символа Леви-Чивиты, получаем следующие свойства векторного произведения

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = -[\mathbf{b} \times \mathbf{a}], \quad d^x = a^y b^z - a^z b^y. \quad (6.28)$$

Выражения для остальных компонент вектора \mathbf{d} можно получить путём циклической перестановки индексов.

Вектор \mathbf{d} направлен ортогонально плоскости, образуемой векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} . Действительно, скалярные произведения

$$(\mathbf{d} \cdot \mathbf{a}) = \epsilon_{ikl} a^i a^k b^l = 0, \quad (\mathbf{d} \cdot \mathbf{b}) = 0 \quad (6.29)$$

в силу антисимметричности символа Леви-Чивиты. Модуль вектора \mathbf{d} равен произведению модулей векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} помноженного на модуль синуса угла между ними — это есть площадь параллелограмма, натянутого на вектора \mathbf{a} , \mathbf{b} .

6.2.2.2 Смешанное произведение

Смешанное произведение ϕ трёх векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} (*scalar triple product*) по определению есть

$$\phi = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \equiv \epsilon_{ikl} a^i b^k c^l = (\mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]). \quad (6.30)$$

В силу свойств символа Леви-Чивиты, смешанное произведение обладает симметриями перестановок

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = -(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}), \quad (6.31)$$

то есть, вслед за символом Леви-Чивиты, смешанное произведение меняет знак при перестановке любых двух векторов. Модуль смешанного произведения равен объёму параллелепипеда, натянутого на вектора \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} .

§6.3. Пространство Минковского

Рассмотрим более подробно свойства 4-х мерного пространства Минковского, см. Пункт 6.1.2.2. В качестве преобразований базиса мы здесь рассматриваем только преобразования Лоренца.

6.3.0.1 Обозначения этого параграфа

Пусть нам дан 4-вектор A^μ , нулевая компонента которого равна φ , а пространственные компоненты составляет трёхмерный вектор \mathbf{A} . Коротко мы это будем записывать как

$$\|A^\mu\| = \{\varphi, \mathbf{A}\}.$$

В физике тензор электромагнитного поля и момент импульса представляют из себя антисимметричные тензора второго ранга. Мы будем рассматривать тензор $F^{\mu\nu}$,

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}.$$

У такого тензора имеется всего 6 независимых матричных элементов.

Наконец, физический интерес представляют также симметричные тензора второго ранга, примером которого является тензор энергии импульса $T^{\mu\nu}$:

$$\|T^{\mu\nu}\| = \begin{pmatrix} T^{00} & \mathbf{S}^T \\ \mathbf{S} & -\hat{\sigma} \end{pmatrix} \quad (6.32)$$

где \mathbf{S} — 3-х мерный вектор-столбец, а $\hat{\sigma}$ — матрица 3x3.

6.3.0.2 Ортогональный поворот

Пусть системы K и K' неподвижны друг относительно друга, однако их пространственные оси повернуты относительно друг друга. Таким образом, преобразование координат ограничивается преобразованием пространственных координат матрицей ортогонального поворота \hat{O} размерности 3x3. Матрица Лоренца в этом случае имеет вид

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \hat{O} \end{pmatrix} \quad (6.33)$$

где $\vec{0}$ — столбец из трёх нулей, а $\vec{0}^T$ — соответственно, строка из трёх нулей.

6.3.1 Антисимметричный тензор второго ранга

Исследуем математические свойства антисимметричного тензора второго ранга $F^{\mu\nu}$. Представим его в виде

$$\|F^{\mu\nu}\| = \downarrow_{\mu} \left(\begin{array}{cc} 0 & -E^j \\ E^i & -\epsilon_{ijk} B^k \end{array} \right) = \begin{array}{l} \mu = i \\ \nu = j \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ \hline E^x & 0 & -B^z & B^y \\ E^y & B^z & 0 & -B^x \\ E^z & -B^y & B^x & 0 \end{array} \right). \quad (6.34)$$

Покажем, что величины \mathbf{E} и \mathbf{B} ведут себя как полярный и аксиальный вектора в трёхмерном пространстве. Для этого произведём преобразование Лоренца (6.33), по сути сводящееся к ортогональному преобразованию в пространстве. Получаем следующий закон преобразования набора величин E^k :

$$E'^i = F'^{i0} = \Lambda^i_{\mu} \Lambda'^0_{\nu} F^{\mu\nu} = \Lambda^i_k F^{k0} = \mathcal{O}^i_k E^k$$

Мы учли то, что и у самого тензора F , и у матрицы преобразования Лоренца Λ есть нулевые элементы и отбросили соответствующие нулевые слагаемые. Таким образом, действительно, величины E^k при ортогональном повороте ведут себя как компоненты 3-х мерного вектора. Закон преобразования величин B^k описан в Пункте 6.2.2. В терминах этого пункта $B^{ik} = -F^{ik}$, для которого закон преобразования определяется ортогональной матрицей \mathcal{O} :

$$B'^{ik} = -\Lambda^i_{\mu} \Lambda'^k_{\nu} F^{\mu\nu} = -\Lambda^i_l \Lambda'^k_m F^{lm} = \mathcal{O}^i_l \mathcal{O}^k_m B^{lm}.$$

Из выводов Пункта 6.2.2 следует, что величины B^k , действительно, образуют трёхмерный аксиальный вектор.

Антисимметричный тензор называют *би-вектором* и равенство (6.34) кратко записывают как

$$\|F^{\mu\nu}\| = (-\mathbf{E}, -\mathbf{B}). \quad (6.35)$$

6.3.1.1 Дуальный антисимметричный тензор

Если дан антисимметричный тензор второго ранга $F^{\mu\nu}$ (6.35), то можно построить дуальный ему антисимметричный псевдо-тензор второго ранга $\tilde{F}^{\mu\nu}$ по правилу

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma}, \quad \|\tilde{F}^{\mu\nu}\| = (-\mathbf{B}, \mathbf{E}). \quad (6.36)$$

Величина $\tilde{F}^{\mu\nu}$ называется псевдо-тензором, поскольку меняет знак при операции пространственной инверсии, см. Пункт 6.1.3.

6.3.2 Операции поднятия и опускания индексов

Используя явный вид метрики пространства Минковского (6.15), можно получить связь компонент контравариантного и ковариантного тензора одной и той же величины, см. общую формулу (6.11). Поскольку метрика диагональна и на диагонали стоит только ± 1 , то изменение матричных элементов при опускании или поднятии индекса должно сводиться только к изменению или сохранению знака этого элемента.

Для 4-вектора получаем:

$$\|A^{\mu}\| = \{\varphi, \mathbf{A}\}. \quad \Leftrightarrow \quad \|A_{\mu}\| = \{\varphi, -\mathbf{A}\}.$$

Для компонент антисимметричного тензора второго ранга при опускании индекса меняет знак только радиальный вектор,

$$\|F^{\mu\nu}\| = (-\mathbf{E}, -\mathbf{B}), \quad \Leftrightarrow \quad \|F_{\mu\nu}\| = (\mathbf{E}, -\mathbf{B}).$$

Наконец, для симметричного тензора (6.32) с нижними индексами получаем, что знак меняют только пространственно-временные компоненты,

$$\|T_{\mu\nu}\| = \left(\begin{array}{cc} T^{00} & -\mathbf{S}^T \\ -\mathbf{S} & -\hat{\sigma} \end{array} \right).$$

§6.4. Криволинейные координаты, вложенные в евклидово пространство

Рассмотрим d -мерное евклидово пространство или пространство Минковского с системой координат r^i , $\{i, j, k, \dots\} = 1, \dots, d$, в которой метрический тензор имеет канонический вид – он имеет диагональный вид и его диагональные элементы равны ± 1 . Мы будем считать, что сначала идут 1, а потом -1 в порядке возрастания номера индекса; в таком случае мы будем обозна-

чать метрический тензор

$$g_{ik} = \eta_{ik}. \quad (6.37)$$

Эту систему мы будем называть канонической прямолинейной системой координат.

Пусть также в этом пространстве определена некоторая криволинейная система координат ξ^{μ} , $\{\mu, \nu, \lambda, \dots\} = 1, \dots, d$. Техника дифференциальной геометрии позволяет обобщать запись векторных и тензорных равенств,

сформулированных исходно чаще всего в канонической прямолинейной системе координат, на криволинейные координаты.

Криволинейная система координат в каждой точке задаёт базис с базисными векторами, являющимися касательными к координатным линиям этой системы координат. Матрицы перехода для тензоров от декартовой к криволинейной системе координат и обратно

$$\mathcal{D}_i^\mu = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial r^i} \equiv \partial_i \xi^\mu, \quad \mathcal{D}_\mu^i = \frac{\partial r^i}{\partial \xi^\mu} \equiv \partial_\mu r^i, \quad \mathcal{D}_i^\mu \mathcal{D}_\mu^k = \delta_{ik}. \quad (6.38)$$

Произвольные векторные поля $\mathbf{v} = \|v^i(\mathbf{r})\|$ и $\mathbf{w} = \|w^i(\mathbf{r})\|$, записанные в декартовых координатах, переписываются в криволинейных координатах согласно правилу

$$v^\mu(\xi) = \mathcal{D}_i^\mu v^i, \quad v_\mu(\xi) = \mathcal{D}_\mu^i v^i. \quad (6.39)$$

Для этого базиса справедливы все рассуждения § 6.1. *Метрический тензор (metric tensor)*

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = \mathcal{D}_\mu^i \eta_{ik} \mathcal{D}_\nu^k, \quad g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\lambda, \quad (6.40)$$

так что скалярное произведение двух полей v^i и w^i в криволинейных координатах записывается в виде свёртки по нижнему и верхнему индексам:

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \eta_{ik} v^i w^k = g_{\mu\nu} v^\mu w^\nu.$$

Метрический тензор $g_{\mu\nu}$ содержит полную информацию о соотношении малых приращений криволинейных координат с расстоянием, площадью и объёмом в прямолинейной системе координат. В частности, элемент объёма

$$d^d r = \sqrt{|g|} d^d \xi, \quad g = \det \|g_{\mu\nu}\|,$$

а квадрат элемента длины

$$dl^2 = g_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu.$$

Пусть есть две криволинейные системы координат — ξ^ν и ξ'^μ . Матрица перехода \mathcal{D}'^μ_ν между этими системами координат равна

$$\mathcal{D}'^\mu_\nu = \mathcal{D}'^\mu_k \mathcal{D}_\nu^k = \frac{\partial \xi'^\mu}{\partial \xi^\nu}. \quad (6.41)$$

6.4.1 Ковариантная производная

Градиент скалярного поля φ в криволинейных координатах вычисляется также, как и в декартовых:

$$\mathcal{D}_\nu^i \partial_i \varphi \equiv \nabla_\nu \varphi = \partial_\nu \varphi \quad (6.42)$$

согласно (6.39). Поле $\partial_\nu \varphi$ является, таким образом, ковариантным полем.

Градиент $\partial_i v_k$ некоторого векторного поля v_k в его ковариантной записи в криволинейных координатах находится согласно более сложному правилу

$$\mathcal{D}_\mu^i \mathcal{D}_\nu^k \partial_i v_k \equiv \nabla_\mu v_\nu = \partial_\mu v_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda v_\lambda. \quad (6.43)$$

Таким образом, в отличие от случая скаляра (6.42), $\partial_\mu v_\nu$ не является ковариантным тензором второго ранга, тогда как $\nabla_\mu v_\nu$ — является. Оператор ∇ называется *ковариантной производной* в отличие от простой производной ∂_μ . Не является, соответственно, и тензором *символ Кристоффеля (Christoffel symbols)* $\Gamma_{\mu\lambda}^\nu$ (6.49): при переходе из одной криволинейной системы координат в другую он не преобразуется согласно правилам (6.39); тем не менее, по определению поднятие и опускание первого индекса у символа Кристоффеля производится по тем же правилам (6.11). В случае, если в (6.43) градиент берётся не от вектора, а от тензора ранга n (например, $v_\mu w_\nu$, ранг 2), то вместо одного слагаемого с символом Кристоффеля в (6.43) должно стоять, соответственно, n слагаемых. Градиент контравариантного поля имеет вид

$$\mathcal{D}_\mu^i \mathcal{D}_\nu^j \partial_i v^k \equiv \nabla_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu v^\lambda, \quad (6.44)$$

что можно получить из требования, что ковариантная производная скаляра $\varphi = v^\lambda w_\lambda$ должна быть просто частной производной:

$$\nabla_\mu \varphi = \mathcal{D}_\mu^i \partial_i \varphi = \partial_\mu \varphi = v^\lambda \nabla_\mu w_\lambda + w_\lambda \nabla_\mu v^\lambda.$$

Закон преобразования символов Кристоффеля при переходе из одной системы координат в другую (6.41) можно получить исходя из определения (6.44):

$$\begin{aligned} \nabla'_\nu v'^\mu &= \mathcal{D}'^\mu_\nu \mathcal{D}'^\sigma_\tau \left(\partial_\sigma (\mathcal{D}'^\tau_\lambda v'^\lambda) + \Gamma^\sigma_{\tau\lambda} (\mathcal{D}'^\tau_\lambda v'^\lambda) \right) = (6.45) \\ &= \partial'_\nu v'^\mu + (\mathcal{D}'^\mu_\sigma \partial'_\nu \mathcal{D}'^\sigma_\lambda + \mathcal{D}'^\mu_\sigma \mathcal{D}'^\tau_\nu \mathcal{D}'^\sigma_\lambda \Gamma^\sigma_{\tau\lambda}). \end{aligned}$$

Откуда заключаем, что

$$\Gamma'^\mu_{\nu\lambda} = \mathcal{D}'^\mu_\sigma \mathcal{D}'^\tau_\nu \mathcal{D}'^\sigma_\lambda \Gamma^\sigma_{\tau\lambda} + \mathcal{D}'^\mu_\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{D}'^\sigma_\lambda}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial \xi'^\nu \partial \xi'^\lambda} \right) \quad (6.46)$$

т.е. $\Gamma'^\mu_{\nu\lambda}$ действительно не является тензором. Отметим, что до этого момента метрика как таковая не фигурировала в наших рассуждениях.

Явное выражение для символов Кристоффеля можно получить, применив формулу (6.46) для перехода из декартовой системы координат в криволинейную. В декартовой системе координат символы Кристоффеля равны нулю, поэтому

$$\Gamma'^\mu_{\nu\lambda} = \mathcal{D}'^\mu_i \frac{\partial^2 r^i}{\partial \xi'^\nu \partial \xi'^\lambda}. \quad (6.47)$$

Ковариантная производная коммутирует с метрическим и абсолютно антисимметричным (6.58) тензорами,

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \nabla_\lambda, \quad \nabla_\lambda g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \nabla_\lambda, \quad (6.48)$$

$$\nabla_\lambda \mathfrak{E}^{\mu\nu\rho} = \mathfrak{E}^{\mu\nu\rho} \nabla_\lambda.$$

Эти равенства легко проверить, записав результат дифференцирования в декартовых координатах, где метрический и антисимметричный тензор постоянны в пространстве и равны соответственно δ^{ik} и ϵ^{ikl} . Символы

Кристоффеля могут быть вычислены согласно формулам

$$\begin{aligned}\Gamma_{\lambda\mu\nu} &= \Gamma_{\lambda\nu\mu} = \mathcal{D}_\lambda^i \partial_\mu \mathcal{D}_\nu^i = \partial_\lambda r^i \partial_\mu \partial_\nu r^i = \\ &= (g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda})/2.\end{aligned}\quad (6.49)$$

Здесь и далее приняты стандартные обозначения:

$$\begin{aligned}\nabla_\mu v_\nu &= v_{\nu;\mu}, \quad \partial_\mu v_\nu = v_{\nu,\mu}, \\ \nabla^\mu &= g^{\mu\nu} \nabla_\nu, \quad v_\nu{}^{;\mu} = g^{\mu\lambda} v_{\nu;\lambda},\end{aligned}$$

Формулу (6.49) можно получить, воспользовавшись условием равенства нулю ковариантной производной от метрического тензора:

$$0 = g_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma g_{\sigma\nu} - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma g_{\sigma\mu}, \quad (6.50)$$

а затем надо попереставлять индексы в соответствии с правой частью (6.49).

6.4.1.1 Вариации криволинейных координат

Предположим, что криволинейная система координат связана с материальной средой, и мы производим (дальнейшую) деформацию этой среды, то есть подвергаем некоторой вариации систему криволинейных координат ξ : $\xi(\mathbf{r}) \rightarrow \xi(\mathbf{r}) + \delta\xi(\mathbf{r})$. Это же самое изменение можно представить в виде движения лагранжевых маркеров,

$$r^i(\xi) \rightarrow r^i(\xi) + \delta r^i(\xi) = r^i(\xi) + v^i(\xi) \delta t$$

где δt – приращение (виртуального) времени, а \mathbf{v} – (виртуальная) скорость, $\delta \mathbf{r} = \mathbf{v} \delta t$.

Вариации координатных систем связаны между собой соотношениями типа

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{D}_\mu^i &= \frac{\partial \delta r^i}{\partial \xi^\mu} = \mathcal{D}_\mu^k \partial_k v^i \delta t, \\ \delta \mathcal{D}_k^\mu &= \frac{\partial \delta \xi^\mu}{\partial r^k} = -\mathcal{D}_i^\mu \partial_k v^i \delta t,\end{aligned}$$

где второе равенство можно получить из требования сохранения тождества $\mathcal{D}_\mu^i \mathcal{D}_k^\mu = \delta_k^i$. Отсюда можно найти вариацию метрики

$$\delta g_{\mu\nu} = \mathcal{D}_\mu^i \mathcal{D}_\nu^k (\partial_i v_k + \partial_k v_i) = \nabla_\mu v_\nu + \nabla_\nu v_\mu. \quad (6.51)$$

Вариация якобиана перехода

$$\delta g = M_g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = 2g \operatorname{div} \mathbf{v} \delta t, \quad (6.52)$$

где $M_g^{\mu\nu}$ – матрица миноров матрицы $\|g_{\mu\nu}\|$, так что $g = M_g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}/d$, где d – размерность пространства.

6.4.2 Операции векторного дифференцирования

Для дальнейших выкладок нам будет полезны выражения для двух различных свёрток символа Кристоффеля

$$\Gamma_{\mu\nu}^\mu = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\nu \sqrt{|g|}, \quad g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\sigma = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu (\sqrt{|g|} g^{\mu\sigma}). \quad (6.53)$$

Оба равенства могут быть выведены из (6.49) с использованием выражения для вариации детерминанта метрики в виде (6.52). При получении второго равенства для преобразования первых двух слагаемых в (6.49) надо использовать тождество $\partial_\rho (g_{\mu\sigma} g^{\sigma\nu}) = 0$.

Теперь можно вычислить выражения для дивергенции вектора и обобщения оператора Лапласа, действующего на скаляр. Первое равенство в (6.53) даёт

$$A^\mu{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\nu (\sqrt{|g|} A^\nu), \quad (6.54)$$

$$\phi^{i;\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\nu (\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi)$$

Из уравнения (6.54) следует теорема Гаусса

$$\int \sqrt{|g|} d^d \xi A^\mu{}_{;\mu} = \oint dS_\mu \sqrt{|g|} A^\mu. \quad (6.55)$$

Дивергенция от антисимметричного тензора второго ранга – полная производная. Не так обстоит дело в общем случае, например, с дивергенцией симметричного тензора второго ранга. Если $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$, то

$$\nabla_\nu T_\mu^\nu = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left(\sqrt{|g|} T_\mu^\nu \right)_{;\nu} - \frac{1}{2} T^{\lambda\nu} g_{\lambda\nu,\mu}. \quad (6.56)$$

Перекидывание производной ...

6.4.2.1 Антисимметричная производная и ротор в трёх-мерном пространстве

Пусть дано векторное ковариантное поле A_μ , то составляя антисимметричную комбинацию его производных, можно составить антисимметричный тензор

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (6.57)$$

Таким образом, ковариантная производная в этом выражении может быть заменена на простую в силу симметрии символов Кристоффеля по последней паре индексов. Отметим, что для контравариантного поля такого сокращения не происходит.

В трёх-мерном пространстве операция (6.57) называется операцией взятия ротора. В векторных обозначениях вместо антисимметричного тензора $F_{\mu\nu}$ используют аксиальный вектор, см. (6.25). Поэтому определение ротора использует полностью антисимметричный тензор, см. Пункт 6.1.3. Операции взятия ротора, записанной в терминах ковариантного вектора, не участвуют символы Кристоффеля,

$$[\operatorname{rot} \mathbf{v}]^\mu = \mathfrak{E}^{\mu\nu\lambda} \nabla_\nu v_\lambda = \mathfrak{E}^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu v_\lambda \quad (6.58)$$

6.4.3 Двумерная поверхность, вложенная в трёх-мерное пространство

Рассмотрим поверхность, которая задаётся уравнением $\Phi(\mathbf{r}) = 0$, а на самой поверхности введены координаты ξ^α , $\{\alpha, \beta \dots\} = \{1, 2\}$. Совокупность $\{\xi^1, \xi^2, \Phi\}$ можно рассматривать как систему криволинейных координат, вложенную в трёх-мерное пространство. Эта система координат определена по крайней мере в некоторой окрестности поверхности $\Phi = 0$. Мы предполагаем, что локальные координаты $\{\xi^1, \xi^2, \Phi\}$ образуют правую тройку. Матрицу перехода из декартовой системы координат в криволинейную будем обозначать D_i^μ , см. (6.38). Для этих криволинейных координат может быть определена метрика $g_{\mu\nu}$, где $\{\mu, \nu, \dots\} = \{1, 2, \Phi\}$. Блок $g_{\alpha\beta}$ этой метрики является метрикой для криволинейных координат ξ^α на рассматриваемой поверхности. Удобно ввести обозначение

$$g^\perp = \det \|g_{\alpha\beta}\|. \quad (6.59)$$

Пусть ℓ – вектор нормали к поверхности, смотрящий из области ‘1’ в область ‘2’; предположим также, что в области ‘1’ $\Phi < 0$, а в области ‘2’, соответственно, $\Phi > 0$. Тогда имеем соотношение

$$\ell^i = \frac{\nabla_i \Phi}{|\text{grad } \Phi|} \equiv \frac{D_i^\Phi}{\sqrt{D_k^\Phi D_k^\Phi}} = \frac{D_i^\Phi}{\sqrt{g^\perp/g}},$$

где D_k^μ определено в (6.38).

На поверхности можно определить полностью антисимметричный тензор второго ранга

$$\mathfrak{E}^{\alpha\beta} = \frac{\epsilon^{\alpha\beta}}{\sqrt{g^\perp}}, \quad \mathfrak{E}_{\alpha\beta} = \sqrt{g^\perp} \epsilon^{\alpha\beta}$$

Введём на поверхности косой градиент

$$\nabla_\alpha^* = \mathfrak{E}_\alpha^\beta \nabla_\beta. \quad (6.60)$$

Простой и косой градиенты коммутируют с метрическим и антисимметричным тензорами,

$$\nabla_\alpha g_{\beta\gamma} = \nabla_\alpha \mathfrak{E}^{\beta\gamma} = 0.$$

сравни с (6.48).

Тензор внешней кривизны

$$K_{\alpha\beta} = K_{\beta\alpha} = \ell^i \partial_\beta D_\alpha^i = -D_\alpha^i \partial_\beta \ell^i. \quad (6.61)$$

Составленные из него два инварианта

$$K = g^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}, \quad K_G = \frac{1}{2} \mathfrak{E}^{\alpha\beta} \mathfrak{E}^{\gamma\delta} K_{\alpha\gamma} K_{\beta\delta} = \frac{\det \|K_{\alpha\beta}\|}{\det \|g_{\alpha\beta}\|} \quad (6.62)$$

называются, соответственно, средней и гауссовой кривизной. Если $R_{1,2}$ – главные кривизны поверхности в точке, то $1/K = 1/R_1 + 1/R_2$, $K_G = 1/(R_1 R_2)$. Отметим, что выбор знака в (6.61) соответствует тому, что для сферы с нормалью ℓ , направленной вовне сферы, средняя кривизна $K < 0$.

6.4.3.1 Запись в терминах единичной нормали

Будем рассматривать такие криволинейные координаты, для которых вектора D_μ^i , $\mu = \{1, 2, \Phi\}$ образуют правую ортонормированную тройку, по крайней мере локально в окрестности рассматриваемой точки. В этом случае тензора, определённые на поверхности, можно записывать в декартовых координатах; любая свёртка таких тензоров с вектором нормали ℓ должна давать ноль. Введём проектор на плоскость $\Phi = \text{const}$ и касательный градиент вдоль неё

$$\delta_{ik}^\perp = \delta_{ik} - \ell^i \ell^k = g_{\alpha\beta} D_i^\alpha D_k^\beta, \quad \partial_i^\perp = \delta_{ik}^\perp \partial_k.$$

Тензор кривизны

$$K_{ik} = -\partial_i^\perp \ell^k = -\partial_k^\perp \ell^i, \quad (6.63)$$

приведённый к диагональному виду, имеет на диагонали ненулевыми элементами $1/R_1$ и $1/R_2$, где $R_{1,2}$ – главные кривизны поверхности в данной точке; собственно говоря, это можно считать определением главных кривизн. Направления на рассматриваемой поверхности, соответствующие главным кривизнам, ортогональны друг другу. **Выбор знака в** В частности, средняя K и гауссова K_G кривизны равны соответственно

$$K = K_{ii} = -\text{div } \ell = -\partial_k^\perp \ell^k, \\ K_G = \det \|K_{ik} + \ell^i \ell^k\| = \frac{1}{2} ((\partial_i \ell_k)(\partial_k \ell_i) - (\partial_i \ell_i)^2).$$

Если мы имеем дело с движением среды, то скорость изменения метрики равна

$$\delta g^\perp = 2g^\perp \delta_{ik}^\perp \partial_i v^k \delta t, \quad (6.64)$$

сравни с (6.52).

6.4.3.2 Параметризация поверхности в декартовых координатах

Пусть теперь поверхность задана уравнением

$$z = h(x, y), \quad \Phi(x, y, z) = z - h(x, y),$$

где $h(x, y)$ – некоторая однозначная функция. Единичный вектор

$$\|\ell^i\| = \frac{\{-\partial_x h, -\partial_y h, 1\}}{\sqrt{g^\perp}}, \quad g^\perp = 1 + \partial_\alpha h \partial_\alpha h,$$

Средняя кривизна

$$K = -\partial_\alpha \ell^\alpha. \quad (6.65)$$

Глава 7

ОТДЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

§7.1. Функции Грина волнового уравнения

7.1.1 Запаздывающая функция Грина

Рассмотрим неоднородное волновое уравнение (4.17), например, его 0-ю компоненту:

$$\square\varphi \equiv \left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta\right)\varphi = 4\pi\rho.$$

где $\rho(t, \mathbf{r})$ – некоторая функция координат и времени. Если мы знаем решение уравнения

$$\square G(t, \mathbf{r}) = 4\pi\delta(t)\delta^{(3)}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c}\delta^{(4)}(x), \quad (7.1)$$

где $\|x^\mu\| = \{ct, \mathbf{r}\}$, то решением уравнения на потенциал φ является

$$\varphi(t, \mathbf{r}) = \int G(t-t', \mathbf{r}-\mathbf{r}') dt d^3\mathbf{r}' \rho(t', \mathbf{r}'). \quad (7.2)$$

Функция G называется *функцией Грина* (в данном случае – *функцией Грина волнового уравнения*).

Функция Грина волнового уравнения в Фурье-представлении (определение Фурье-образа дано ниже в (7.4))

$$(k^2 - \omega^2/c^2)G(\omega, \mathbf{k}) = 4\pi, \quad (7.3)$$

$$G(\omega, \mathbf{k}) = \frac{4\pi}{k^2 - (\omega/c + i0)^2} = -\frac{4\pi}{k_\mu k^\mu}.$$

Добавка ‘ $i0$ ’ задаёт правила обхода полюсов, соответственно $\|k^\mu\| = \{\omega/c + i0, \mathbf{k}\}$. Эта добавка определяется однозначно из дополнительно накладываемого требования – требования причинности: при $t < 0$ функция Грина G должна быть тождественно равна нулю. Функция Грина, удовлетворяющая принципу причинности, называется *запаздывающей функцией Грина*. Из требования на t -зависимость запаздывающей функции Грина следует, что в (7.2) ‘отклик’ $\varphi(t)$ может быть в принципе отличен от нуля только в том случае, если ‘источник’ $\rho(t')$ имеет ненулевую амплитуду при $t' \leq t$. Подчеркнём, что можно построить и другие решения (7.1) – также называемые функциями Грина, которые не будут удовлетворять принципу причинности.

В координатно-временном представлении запаздывающая функция Грина

$$\begin{aligned} G(t, \mathbf{r}) &= \int (d\omega) (d^3\mathbf{k}) G(\omega, \mathbf{k}) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \\ &= \frac{\delta(t - r/c)}{r} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Это выражение можно переписать также в ковариантном виде:

$$G(x) = 2\theta(x^0)\delta(x_\mu x^\mu) \quad (7.5)$$

В координатно-частотном представлении функция Грина имеет вид

$$G(\omega, \mathbf{r}) = \int (d^3\mathbf{k}) G(\omega, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \frac{\exp[i(\omega/c)r]}{r}. \quad (7.6)$$

7.1.1.1 Приложение: аналитические свойства запаздывающей функции Грина в частотно-волновом представлении

Для того, чтобы показать, что запаздывающая функция Грина действительно удовлетворяет принципу причинности, рассмотрим обратное Фурье-преобразование от частотно-волнового представления к временно-волновому представлению:

$$G(t, \mathbf{k}) = \int \frac{4\pi e^{-i\omega t} (d\omega)}{k^2 - (\omega/c + i0)^2} \quad (7.7)$$

Контур интегрирования и положения полюсов подынтегрального выражения (7.7) показаны на Рис. 7.1а. Когда время отрицательно, $t < 0$, то контур интегрирования следует уводить вверх на комплексной плоскости ω , поскольку в этом случае экспонента в подынтегральном выражении становится малой. На пути такой деформации контур не встречает полюсов, поэтому полный интеграл равен нулю.

В обратном случае, когда $t > 0$, экспонента в подынтегральном выражении (7.7) стремится к нулю при большой отрицательной мнимой части частоты ω , поэтому контур интегрирования надо уводить в нижнюю полуплоскость комплексной плоскости ω . На пути этой деформации встречаются два полюса подынтегрального выражения, в результате чего возникает ненулевой результат интегрирования:

$$G(t, \mathbf{k}) = \frac{4\pi\theta(t)}{k} \sin(ckt). \quad (7.8)$$

Покажем, что в частотно-координатном представлении функция Грина действительно имеет вид (7.6). Для этого при проведении обратного Фурье-преобразования

от волнового вектора \mathbf{k} к радиус-вектору \mathbf{r} в интегрировании по \mathbf{k} перейдём к сферическим координатам, направив \mathbf{r} вдоль оси Oz :

$$\begin{aligned} G(\omega, \mathbf{r}) &= \int_0^\infty \frac{4\pi k^2 dk / (2\pi)^3}{k^2 - (\omega + i0)^2} \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta e^{ikr \cos \vartheta} \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{1}{r} \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{\pi i} \frac{k \exp(ikr)}{k^2 - (\omega + i0)^2} \end{aligned}$$

Сначала мы взяли интегралы по углам, воспользовавшись тем, что $\sin \vartheta d\vartheta = -d \cos \vartheta$. Исходный интеграл по k на луче $(0, +\infty)$ мы сначала распространили на всю прямую, воспользовавшись тем, что подинтегральное выражение чётно по k ; затем к подинтегральному выражению мы добавили нечётную функцию, пропорциональную $\cos(kr)$, поскольку эта добавка производит не изменяет значения интеграла. Комплексная структура интеграла по k показана на Рис. 7.1б). После проведения интегрирования, приходим к результату (7.6)

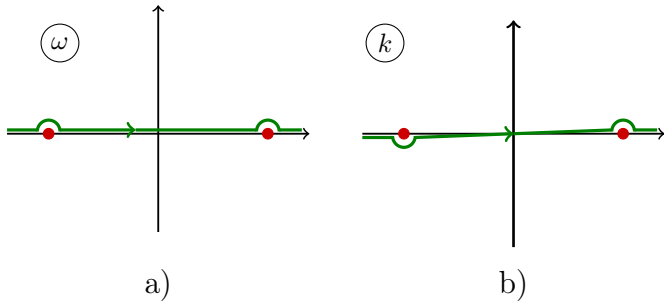


Рис. 7.1 Комплексная структура запаздывающей функции Грина (7.3): а) Расположение полюсов при интегрировании по частоте, (7.7); б) положение полюсов при интегрировании по абсолютному значению волнового вектора k , для примера взят случай $\omega < 0$. Красными жирными точками обозначены положения полюсов подинтегрального выражения, зелёной линией — контура, вдоль которых производится интегрирование.

7.1.2 Опережающая и другие функции Грина

Вообще говоря, наиболее общим видом решения уравнения (7.3) является

$$G_{\text{gen}} = \frac{4\pi}{k^2 - \omega^2/c^2} + F(\omega, \mathbf{k}) \delta(k^2 - \omega^2/c^2). \quad (7.9)$$

где функция $F(\omega, \mathbf{k})$ не имеет сингулярности, когда $k^2 - \omega^2/c^2 = 0$. Из этого выражения в зависимости от выбора правила обхода полюсов и функции $F(\omega, \mathbf{k})$ получаются разные функции Грина.

...

7.1.3 Тензорная функция Грина

Запишем функция Грина для электрического поля. Волновое уравнение на электрическое поле в координатно-частном представлении имеет вид

$$\left(\text{rot rot} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{E} = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \mathbf{j}. \quad (7.10)$$

Решение для электрического поля можно получить не прямым путём, а пользуясь уже полученным решением для 4-потенциала в Лоренцевой калибровке (ответ для электрического поля естественно не должен зависеть от выбранной калибровки). В результате получаем для запаздывающей функции Грина:

$$E^i(\mathbf{r}) = \int G_{\omega}^{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3 r' j^j, \quad (7.11)$$

$$G_{\omega}^{ij}(\mathbf{r}) = i\omega \left(\delta^{ij} + \frac{c^2}{\omega^2} \partial_i \partial_j \right) \frac{\exp(i\omega r/c)}{r}$$

В частотно-волновом представлении

$$G_{\omega, \mathbf{k}}^{ij} = \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{\omega^2/c^2} \right) \frac{i\omega/c}{k^2 - (\omega/c + i0)^2}.$$

В англоязычной литературе функции Грина типа (7.11) называются *diadic Green's function*, в отличие от скалярной функции Грина (7.3).

7.1.4 Свойства функций Бесселя

$$I_{\nu}(z) = e^{-\pi\nu i/2} J_{\nu}(e^{\pi i/2} z)$$

7.1.4.1 Сферические функции Бесселя

Сферические функции Бесселя связаны с простыми функциями Бесселя универсальным соотношением типа

$$j_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{l+1/2}(z).$$

Сферическая функция Ганкеля первого рода

$$h_l^{(1)}(z) = j_l(z) + iy_l(z) = -iz^l \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^l \frac{e^{iz}}{z}$$

Явные выражения для первых целочисленных функций Ганкеля первого рода

$$\begin{aligned} h_0^{(1)}(z) &= -i \frac{e^{iz}}{z}, & h_1^{(1)}(z) &= -\frac{(z+i)e^{iz}}{z^2}, \\ h_2^{(1)}(z) &= i \frac{(z^2 + 3iz - 3)e^{iz}}{z^3} \end{aligned}$$

На близких и далёких расстояниях, когда $z \ll 1$ и $z \gg 1$ соответственно, асимптотиками функции Ганкеля первого рода являются

$$\sim -\frac{i(2l-1)!!}{z^{l+1}}, \quad \sim (-i)^{l+1} \frac{\exp(iz)}{z}, \quad (7.12)$$

см. справочник Olver и др., 2010, Упр. (10.52.4) и (10.52.2).

Теорема суммирования

$$\frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \quad (7.13)$$

$$= i(-1)^l \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) h_l^{(1)}(kr) j_l(kr') P_l(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')$$

см. там же, Упр. 10.60.1, 10.60.2.

§7.2. Параметризация поля в случае сферической геометрии

Предположим, что мы изучаем систему, локализованную в пространстве, и производящую возмущение поля в окружающем пространстве. Такой системой может быть, например, излучающая система движущихся с ускорением зарядов. Декартова система координат оказывается не вполне подходящей для математического писания подобных задач. Более подходящей является сферическая система координат с началом находящемся внутри рассматриваемой системы.

В этом параграфе мы разрабатываем математический аппарат, позволяющий описывать электромагнитное поле в сферической системе координат. Мы пользуемся обозначениями Пункта 6.4.3. В нашем случае 3-х мерной криволинейной системой координат является сферическая система координат $\{r, \theta, \phi\}$, а двумерной поверхностью является поверхность $r = \text{const}$ с углами в качестве координат на этой поверхности, $\alpha, \beta, \dots = \{\theta, \phi\}$. Оператор Лапласа Δ мы будем представлять в виде

$$\Delta = \frac{1}{r} \partial_r^2 r + \frac{1}{r^2} \Delta_a, \quad (7.14)$$

$$\Delta_a = \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta \sin \theta \partial_\theta + \frac{\partial_\phi^2}{\sin^2 \theta}$$

Таким образом, дифференциальный оператор Δ_a является оператором Бельтрами-Лапласа на сфере единичного радиуса (в терминах квантовой механике его можно назвать оператором квадрата углового момента, взятого с обратным знаком).

7.2.1 Параметризация векторного поля

Пусть нам дано трёхмерное векторное поле \mathbf{E} , не возрастающее на бесконечности. Покажем, что это поле можно представить в виде (*Neumann–Debye decomposition*)

$$\mathbf{E} = \text{rot}(\mathbf{r}\chi) + \text{rot rot}(\mathbf{r}\eta) - \text{grad } \varphi, \quad (7.15)$$

где потенциал φ также ограничен на бесконечности. Конечно, представление векторного поля в виде (7.15) не единственно, но оно удобно, если задача имеет сферическую симметрию. Сперва возьмём дивергенцию от обеих

частей (7.15), получим

$$\Delta \varphi = -\text{div } \mathbf{E}, \quad \varphi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d^3 \mathbf{r}' \text{div } \mathbf{E}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (7.16)$$

Так определённый потенциал φ не возрастает на бесконечности. Не изменяя этого свойства, к нему можно добавить только константу, что не потребует изменения функций η, χ .

Вообще говоря, потенциал φ оказывается отличным от нуля по всёму пространству, что может оказаться неудобным. Поэтому с практической точки зрения бывает удобным заменить выделение потенциальной части поля на выделение другой части поля, назовём её $-4\pi \mathbf{P}$, которая обращается строго в нуль при больших расстояниях r , и удовлетворяет условию

$$\text{div } \mathbf{E} = -4\pi \text{div } \mathbf{P},$$

но в общем случае $\text{rot } \mathbf{P} \neq 0$. Определение \mathbf{P} при известном поле \mathbf{E} неоднозначно, оно должно фиксироваться из дополнительных соображений.

Рассмотрим теперь бездивергентное поле $\mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$, обозначив его для лаконичности той же буквой \mathbf{E} . Расписывая (7.15) покомпонентно, получаем:

$$E_\alpha = r \nabla_\alpha^* \chi + \partial_\alpha \partial_r (r\eta), \quad E^r = -\frac{1}{r} \Delta_a \eta.$$

где E_α — компоненты ковариантного вектора, а косой поверхностный градиент ∇_α^* определён в (6.60). Сферически симметричная часть в функций χ и η дают нулевой вклад в поле \mathbf{E} . Условие бездивергентности в сферических координатах имеет вид

$$\partial_r (r^2 E^r) + r^2 \nabla_\alpha E^\alpha = 0.$$

пже E^α — компоненты контравариантного вектора.

Найдём функции χ, η по заданному полю \mathbf{E} . Проектируя уравнение (7.15) и его ротор на радиус-вектор \mathbf{r} , получаем:

$$\Delta_a \chi = -r [\text{rot } \mathbf{E}]^r, \quad \Delta_a \eta = -r E^r. \quad (7.17)$$

7.2.2 Электромагнитное поле

Согласно шаблону (7.15), представим электромагнитное поле в виде

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c} \operatorname{rot}(\mathbf{r} \partial_t \chi) + \operatorname{rot} \operatorname{rot}(\mathbf{r} \eta) + \frac{q\mathbf{r}}{r^3}, \quad (7.18)$$

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{c} \operatorname{rot}(\mathbf{r} \partial_t \eta) + \operatorname{rot} \operatorname{rot}(\mathbf{r} \chi).$$

Мы сделали так, чтобы функции η, χ входили симметрично в выражения для полей \mathbf{E}, \mathbf{H} . Для того, чтобы выполнялись все уравнения Максвелла, требуется, чтобы функции η, χ удовлетворяли волновому уравнению Гельмгольца (4.38)

$$\partial_\mu \partial^\mu \eta = 0, \quad \partial_\mu \partial^\mu \chi = 0.$$

Потенциальный вклад в электрическое поле \mathbf{E} постоянен во времени в силу закона сохранения полного заряда. В дальнейшем этот мы будем опускать, поэтому

$$\Delta_a \eta = -rE^r, \quad \Delta_a \chi = -rH^r. \quad (7.19)$$

Поток энергии через сферу радиуса r равен

$$I = -\frac{r}{4\pi} \int d\Omega \left(\partial_t \chi \partial_r (r \Delta_a \chi) + \partial_t \eta \partial_r (r \Delta_a \eta) \right) \quad (7.20)$$

Перекрёстные вклады η - χ не вошли в ответ в силу разной угловой симметрии вкладов от этих функций в электромагнитные поля.

7.2.2.1 Разложение плоской волны по сферическим волнам

Пусть в декартовых координатах мы имеем плоскую волну с круговой поляризацией, у которой поля \mathbf{E}_{ext} и \mathbf{H}_{ext} имеют вид

$$\mathbf{E}_{\text{ext}} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\varphi + ikz}, \quad \mathbf{H}_{\text{ext}} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\varphi + ikz}.$$

где фаза $\varphi = -i\omega t + \varphi_0$, и волновой вектор $k = \omega/c$. Наша цель – найти функции χ и η , которые бы соответствовали этой волне. Для этого найдём сначала r -компоненты полей с тем, чтобы затем воспользоваться соотношениями (7.19) для нахождения исходных η и χ :

$$rE_{\text{ext}}^r = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}) = r \sin \theta e^{i\varphi + i\varphi + ikz} = -irH_{\text{ext}}^r. \quad (7.21)$$

Заметим здесь, что функции rE^r и rH^r также удовлетворяют волновому уравнению Гельмгольца. Из (7.19) следует, что функции η, χ равны

$$\eta = -i\chi = \frac{1}{2} r \sin \theta e^{i\varphi + i\varphi + ikz}.$$

Теперь наша задача состоит в том, чтобы разложить функции η, χ по сферическим гармоникам. Для этого выпишем некоторые формулы, воспользовавшись Флюгге (1974, сс. 298, 300)

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2l+1)} i^l j_l(kr) \mathcal{Y}_{l,0}(\theta), \quad (7.22)$$

$$\sin \theta e^{i\varphi} \mathcal{Y}_{l,0}(\theta) = C_{l,+} \mathcal{Y}_{l+1,1}(\theta, \phi) + C_{l,-} \mathcal{Y}_{l-1,1}(\theta, \phi), \quad (7.23)$$

где \mathcal{Y} – сферические гармоники, а коэффициенты разложения

$$C_{l,+} = -\sqrt{\frac{(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+3)}}, \quad (7.24)$$

$$C_{l,-} = \sqrt{\frac{l(l-1)}{(2l-1)(2l+1)}},$$

В результате получаем, что

$$rE_{\text{ext}}^r = \frac{\sqrt{4\pi} e^{i\varphi}}{k} \times \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{l(l+1)(2l+1)} i^{l-1} j_l(kr) \mathcal{Y}_{l,1}(\theta, \phi), \quad (7.25)$$

Таким образом, используя соотношение (7.19), приходим к ответу

$$\eta = \frac{\sqrt{4\pi} e^{i\varphi}}{k} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2l+1}}{\sqrt{l(l+1)}} i^{l-1} j_l(kr) \mathcal{Y}_{l,1}(\theta, \phi). \quad (7.26)$$

Наконец, для выбранной круговой поляризации r -компонент полей имеем соотношение (7.21), поэтому в силу (7.19) $\chi = i\eta$.

Часть V ЗАДАЧИ

§7.3. Преобразование Лоренца

• **Задача 1:** По кольцу электро нейтрального провода радиуса a , покоящемуся в лабораторной системе координат K , течёт ток I . Погонная плотность свободных электронов, участвующих в перемещении заряда по проводу, равна ρ . Рассмотрим систему координат K' , движущуюся со скоростью v , лежащей в плоскости кольца провода. Считая, что все свободные электроны

в элементе провода движутся с одной и той же скоростью, найти распределение погонной плотности нескомпенсированного заряда $\delta\rho'$ вдоль провода, которая будет наблюдаться в движущейся системе координат K' . Рассмотреть предельный случай $v \gg u$, где u — скорость движения электронов в лабораторной системе координат.

§7.4. Столкновение и распад частиц

• **Задача 1:** Если коллайдер на встречных пучках работает в штатном режиме, то при столкновении двух протонов интересующая нас реакция X происходит с превышением её порога в α раз. Однако из-за неполадок один из двух пучков в коллайдере имеет энергию, составляющую часть ϵ от номинальной. При каком значении ϵ порог реакции X достигнут не будет? Пучки считать релятивистскими, так что $\gamma \gg \alpha^2$.

• **Решение:** Пусть энергии налетающих друг на друга протонов равны \mathcal{E}^+ и \mathcal{E}^- соответственно, их характеризуют факторы γ_{\pm} и абсолютные значения безразмерных скорости β_{\pm} , см. (2.26). Энергия E и импульс P составной из этих двух протонов частицы

$$\begin{aligned} E &= \mathcal{E}^+ + \mathcal{E}^- = m_p c^2 (\gamma_+ + \gamma_-), \\ P &= m_p c (\gamma_+ \beta_+ - \gamma_- \beta_-). \end{aligned}$$

где m_p — масса протона. Масса этой составной частицы

$$M^2 = 2m_p^2 (\gamma_+ \gamma_- (1 + \beta_+ \beta_-) + 1).$$

В пределе $\gamma_{\pm} \gg 1$ масса составной частицы приближённо равна

$$M = 2m_p \sqrt{\gamma_+ \gamma_-}.$$

По условию, если коллайдер работает в штатном режиме, то $\gamma_{\pm} = \gamma$, и $M = 2m_p \gamma = \alpha M_0$, где масса M_0 соответствует порогу реакции. Если теперь в коллайдере неполадки, так что по-прежнему $\gamma_+ = \gamma$, но $\gamma_- = \epsilon \gamma$, то $M = \alpha \sqrt{\epsilon} M_0$. В результате получаем, что если

$$\epsilon < \frac{1}{\alpha^2}, \quad (7.27)$$

то порог реакции достигнут не будет.

• **Задача 2:**

§7.5. Электро и магнито статика

7.5.1 Электростатика

• **Задача 1:** Отрицательный заряд $-Q$ распределён равномерно по длинному цилиндру длиной L и диаметром $2a$, $L \gg a$, а компенсирующий его положительный заряд находится в центре цилиндра. Найти электростатический потенциал этой системы зарядов на расстояниях $r \gg L$ от неё.

• **Решение:** Полный заряд системы зарядов равен нулю. Система симметрична, поэтому и её дипольный момент относительно её центра также равен нулю. Та-

ким образом, для вычисления электростатического потенциала системы на далёких расстояниях надо вычислить её квадрупольный момент (5.13), который отличен от нуля. Направим ось Oz декартовой системы координат вдоль оси цилиндра. В силу симметрии системы ненулевыми матричными элементами квадрупольного момента D^{ik} являются

$$D^{xx} = D^{yy} = -\frac{D^{zz}}{2}.$$

Вычислим D^{zz} элемент, считая для простоты диаметр цилиндра нулевым, $a \rightarrow 0$. В выражении (5.13) для

квадрупольного момента в круглых скобках стоит $2z^2$, так что

$$D^{zz} = \frac{2Q}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dz z^2 = \frac{QL^2}{6}.$$

В результате получаем, что электростатический потенциал φ (5.5) равен

$$\varphi = \frac{D^{ik} n^i n^k}{2r^3} = \frac{QL^2}{24} \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{r^5}. \quad (7.28)$$

7.5.2 Магнитостатика

7.5.2.1 Сила и момент сил, действующие на магнитный диполь со стороны внешнего магнитного поля

Сила Лоренца \mathbf{F} , действующая на диполь, возникает только если магнитное поле имеет неоднородность в пространстве. Действительно, вклад в силу \mathbf{F} , происходящий от однородной части магнитного поля, равен нулю, поскольку интеграл по пространству от плотности тока \mathbf{j} для статической системы токов равен нулю. Тогда учтём в магнитном поле изменение в пространстве в главном приближении, положив

$$V^l(\mathbf{r}) = V^l + r^m \partial_m V^l + \dots,$$

где в правой части равенства магнитное поле V^l и его градиент $\partial_m V^l$ должны браться в точке, находящейся

внутри системы токов, от этой же точки должен отсчитываться радиус-вектор \mathbf{r} . Теперь получаем для компонент полной силы Лоренца (3.39), действующей на всю систему

$$\begin{aligned} F^i &= \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{r} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]^i = \epsilon^{ikl} \partial_m B^l \int d^3\mathbf{r} \frac{j^k r^m}{c} = \\ &= \partial_i (\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) B^i, \end{aligned} \quad (7.29)$$

где мы воспользовались выкладками уравнения (5.31), уравнением Максвелла $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, а затем равенством

$$0 = [\boldsymbol{\mu} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}] = \operatorname{grad}(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) - (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathbf{B},$$

основывающемся на уравнении Максвелла $\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0$. Видно соответствие между выражениями для сил, действующих на магнитный и электрический диполи, см. (7.29) и (5.22).

Момент сил \mathbf{K} , действующий на магнитный диполь, происходит от однородной части магнитного поля,

$$\begin{aligned} K^i &= \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{r} [\mathbf{r} \times [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]]^i = B^k \int d^3\mathbf{r} \frac{r^k j^i}{c} = \\ &= \epsilon_{kil} \mu^l B^k = [\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}]^i. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Раскрывая двойное векторное произведение мы воспользовались тем, что одно из них равно нулю вследствие антисимметричности тензора μ^{ik} (5.31).

§7.6. Электромагнитные волны

• **Задача 1:** В лабораторной системе отсчёта K дана бегущая линейно поляризованная волна $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$, $\mathbf{k} = \{0, 0, k\}$, $\mathbf{E}_0 \parallel Ox$. Система отсчёта K' движется со скоростью $\mathbf{V} = \{0, V, 0\}$. Найдите магнитное поле волны в системе K' .

• **Решение:** Согласно (4.44), электромагнитное поле бегущей линейно поляризованной монохроматической волны представимо в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 \cos(\varphi), \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 \cos(\varphi), \end{aligned} \quad \varphi = -k_\mu x^\mu + \varphi_0.$$

Фаза φ является релятивистским инвариантом, а действительные вектора \mathbf{E}_0 , \mathbf{B}_0 преобразуются по закону (4.6). Таким образом, в новой системе координат

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E}'_0 \cos(\varphi), \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{B}'_0 \cos(\varphi), \end{aligned} \quad \varphi = -k'_\mu x'^\mu + \varphi_0.$$

Из условия задачи следует, что $\mathbf{B}_0 \parallel \mathbf{V}$. Поэтому

$$B_0^y = B_0^z = E_0^x, \quad B_0^x = \gamma \frac{V}{c} E_0^x, \quad (7.31)$$

где мы воспользовались (4.41). Волновой вектор в системе K' согласно (4.48) имеет компоненты

$$\mathbf{k}' = \{0, -\gamma V k/c, k\}.$$

Как и должно быть, $\mathbf{k}' \perp \mathbf{B}'_0$. Таким образом, определив \mathbf{B}'_0 и \mathbf{k}' , мы полностью определили поле \mathbf{B}' . В новой системе координат волна по-прежнему линейно поляризована.

• **Задача 2:** В лабораторной системе отсчёта K дана бегущая линейно поляризованная волна $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$, $\mathbf{k} = \{0, 0, k\}$, $\mathbf{E}_0 \parallel Ox$. Постройте тензор

энергии-импульса для такой волны. Система отсчёта K' движется со скоростью $\mathbf{V} = \{0, 0, V\}$. Запишите преобразование, связанное с переходом между системами отсчёта $K \rightarrow K'$, для поля волны и для тензора энергии-импульса, и покажите, что они дают соответствующие друг другу результаты.

• **Решение:** Согласно (4.43), тензор энергии-импульса плоской волны равен

$$T^{\mu\nu} = \frac{\mathbf{E}^2}{4\pi k^2} k^\mu k^\nu = \frac{\mathbf{E}^2}{4\pi} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В движущейся системе координат

$$\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]/c) = \gamma(1 - V/c)\mathbf{E}$$

согласно (4.6) и (4.41). Волновой вектор не изменяет своего направления в системе K' , поскольку $\mathbf{k} \parallel \mathbf{V}$. С другой стороны, его абсолютное значение в K'

$$k' = \gamma(1 - V/c)k.$$

Если применить преобразование Лоренца непосредственно к тензору энергии-импульса,

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda'^\mu_\sigma \Lambda'^\nu_\varsigma T^{\sigma\varsigma} = \frac{\mathbf{E}^2}{4\pi k^2} \Lambda'^\mu_\sigma k^\sigma \Lambda'^\nu_\varsigma k^\varsigma, \quad (7.32)$$

то пользуемся преобразованием для волнового вектора; тогда получаем, что в новой системе координат тензор энергии-импульса приобретает множитель $\gamma^2(1 - V/c)^2$. Если применять преобразование к электрическому полю и через него выражать $T^{\mu\nu}$, то, как и должно быть, получаем тот же самый фактор.

§7.7. Излучение электромагнитных волн

7.7.1 Когерентное излучение

• **Задача 1:** Магнитный $\boldsymbol{\mu}$ и электрический диполь \mathbf{d} прикреплены к точечному объекту и колеблются с частотой ω , $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 \cos(\omega t)$, $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Чему равна сила (её среднее по времени значение), необходимая для удержания в покое этого объекта? Провести численный расчёт, если полная мощность излучения равна 1 ГВт (мощность генерации одного атомного реактора), направление диполей ортогональны $\boldsymbol{\mu}_0 \perp \mathbf{d}_0$ и нет задержки фазы, $\varphi = 0$.

Если $\varphi = 0$, такой источник излучения называется *элементарный излучатель Гюйгенса (Huygens'*

radiation source).

• **Решение:** Из соображений симметрии следует, что средняя по времени сила

$$\langle \mathbf{F} \rangle \propto \frac{\omega^4}{c^4} [\mathbf{d}_0 \times \boldsymbol{\mu}_0],$$

где множитель мы подобрали из соображений размерности. Действительно, поскольку $\boldsymbol{\mu}$ – аксиальный вектор, а \mathbf{d} – радиальный, то \mathbf{F} является радиальным вектором, как и должно быть.

Для того, чтобы найти численный коэффициент и множитель, зависящий от фазы, приступим к вычислениям. Посчитаем, какой импульс уносится в едини-

цу времени производимым системой диполей излучением. За время dt образуется сферический слой излучения толщиной $dr = c dt$ (и радиусом r). Импульс этой порции излучения $d\mathbf{P}$ есть интеграл по слою от пространственной плотности импульса \vec{p} , см. (3.18). Плотность импульса пропорциональна плотности потока энергии \mathbf{S} , см. (3.19). Таким образом, сила \mathbf{F} , которую надо прикладывать к излучающей системе, равна

$$\mathbf{F}(t - r/c) = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{1}{dt} r^2 dr \int d\omega \frac{\mathbf{S}}{c^2}.$$

где $d\omega$ – элемент телесного угла. Полное электромагнитное поле является суперпозицией вкладов от электрического и магнитного диполя, например $\mathbf{E} = \mathbf{E}_d + \mathbf{E}_\mu$. Для вычисления силы \mathbf{F} в векторе Умова-Пойнтинга \mathbf{S} (4.30) надо оставить только перекрёстные члены, поскольку чисто электро-дипольное или магнито-дипольное излучение не сообщает излучающей системе импульс:

$$\mathbf{S} \rightarrow \frac{c([\mathbf{E}_d \times \mathbf{B}_\mu] + [\mathbf{E}_\mu \times \mathbf{B}_d])}{4\pi},$$

Для полей имеем, выделяя в (5.40,5.41) и (5.48) части, соответствующие уходящим волнам:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{[\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}]]}{c^2 r} + \frac{[\mathbf{n} \times \ddot{\boldsymbol{\mu}}]}{c^2 r}, \\ \mathbf{B} &= -\frac{[\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{d}}]}{c^2 r} + \frac{[\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\mu}}]]}{c^2 r}. \end{aligned}$$

В результате получаем, что мгновенное значение силы

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{2}{c^4} \int \frac{d\omega}{4\pi} [[\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}] \times [\mathbf{n} \times \ddot{\boldsymbol{\mu}}]] = \\ &= \frac{2\omega^4}{3c^4} [\mathbf{d}_0 \times \boldsymbol{\mu}_0] \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned}$$

Два перекрёстных вклада в вектор Умова-Пойнтинга после использования преобразований векторной алгебры оказываются равными другу. Сила, усреднённая по времени, равна

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \frac{\omega^4}{3c^4} [\mathbf{d}_0 \times \boldsymbol{\mu}_0] \cos \varphi. \quad (7.33)$$

Вставить рисунок с угловой зависимостью интенсивности излучения в единицу телесного угла

7.7.2 Торможение излучением

• **Задача 2:** Диполь $\mathbf{d} \parallel Oz$ колеблется с частотой ω , так что $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \cos(\omega t)$. На расстоянии $L \gg \lambda$ в направлении оси Oz (где $\lambda = 2\pi c/\omega$ – соответствующая длина волны излучения) находится другой диполь \mathbf{p} , колебания которого описываются уравнением $\partial_t^2 \mathbf{p} + \omega_0^2 \mathbf{p} = (e^2/m)\mathbf{E}$, где e и m – эффективные заряд

и масса диполя, а \mathbf{E} – полное поле в точке положения диполя. Найдите амплитуду и фазу колебаний второго диполя, учитывая его потери энергии на излучение.

• **Решение:** Условие $L \gg \lambda$ означает, что второй диполь находится в волновой зоне первого излучающего диполя. С другой стороны, поле уходящих волн в направлении Oz равно нулю. Это означает, что в (5.40) следует удерживать среднее слагаемое, которое было бы подавлено по сравнению с последним, если бы диполь \mathbf{p} находился не на оси Oz . Итак, поле диполя \mathbf{d} в месте положения диполя \mathbf{p} есть

$$\mathbf{E}_d = \frac{2\dot{\mathbf{d}}}{cL^2}$$

Таким образом, уравнение колебаний второго диполя есть

$$\ddot{\mathbf{p}} + \omega_0^2 \mathbf{p} = \frac{e^2}{m} \mathbf{E}_d + \frac{e}{m} \mathbf{F}_{Lf} = \frac{2e^2 \dot{\mathbf{d}}}{mcL^2} + \frac{2e^2}{3mc^3} \ddot{\mathbf{p}}.$$

В правой части мы учли, что на диполь \mathbf{p} действует не только поле диполя \mathbf{d} , но и произведённое им самим поле, действие которого приводит к появлению лоренцевской силы трения, см. (5.81). Представим \mathbf{d} и \mathbf{p} в виде комплексных амплитуд,

$$\mathbf{d} = \text{Re}(\mathbf{d}_0 e^{-i\omega t}), \quad \mathbf{p} = \text{Re}(\mathbf{p}_0 e^{-i\omega t})$$

Тогда уравнение на комплексную амплитуду \mathbf{p}

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{2ie^2\omega^3}{3mc^3} \right) \mathbf{p}_0 = -\frac{2ie^2\omega}{mcL^2} \mathbf{d}_0.$$

В частности, если собственная частота второго диполя совпадает с частотой первого диполя, $\omega_0 = \omega$, то

$$\mathbf{p} = \frac{3e^2}{\omega^2 L^2} \mathbf{d}_0 \cos(\omega t) = \frac{3}{4\pi^2} \frac{\lambda^2}{L^2} \mathbf{d}_0 \cos(\omega t) \quad (7.34)$$

7.7.3 Излучение релятивистских частиц

• **Задача 3:** Электрон пролетает между обкладок конденсатора, параллельно его обкладкам и через его центр. Заряд на обкладках конденсатора настолько мал, что траектория электрона является почти прямой линией. Радиус круглых обкладок конденсатора R , скорость электрона v . Найдите излучённую электроном энергию.

• **Решение:**

• **Задача 4:** Две ультра-релятивистские частицы с противоположными электрическими зарядами пролетают мимо друг друга на прицельном расстоянии $\rho \gg r_0$ (r_0 – классический радиус электрона), так что их траектории движения мало отличаются от прямых. Оценить время (в лабораторной системе координат и в системе координат одной из частиц), на котором одна частица на другую действует посредством кулоновской силы существенно (то есть порядка пиковой силы). Оцените полную излучённую частицами энергию.

• **Решение:** По условию в главном приближении частицы движутся равномерно и прямолинейно. Поэтому для определения электрического поля, действующего со стороны одной частицы на другую, надо пользоваться выражением (4.60). Выберем декартову систему координат с осью Ox , направленной по движению частиц. Траектории частиц лежат в плоскости Oxy . Траектории частиц $\{x_1(t), y_1(t)\}$ и $\{x_2(t), y_2(t)\}$ суть

$$x_1 = vt, \quad y_1 = -\rho/2, \quad x_2 = -vt, \quad y_2 = \rho/2.$$

В терминах (4.60)

$$\mathbf{r} - \mathbf{z}(t) = \{2vt, \rho, 0\}, \quad \sin^2 \theta_t = \frac{\rho^2}{4v^2 t^2 + \rho^2},$$

поэтому

$$|\mathbf{r} - \mathbf{z}(t)| \sqrt{1 - (v/c)^2 \sin^2 \theta_t} \approx \frac{1}{\gamma} \sqrt{4\gamma^2 c^2 t^2 + \rho^2},$$

где мы воспользовались тем, что $v^2/c^2 = 1 - 1/\gamma^2$ и пренебрегли малыми по $1/\gamma$ поправками. Теперь можно записать полное выражение (4.61) для электромагнитного поля, действующего со стороны частицы №1 на частицу №2

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t) &= \frac{\gamma e}{(4\gamma^2 c^2 t^2 + \rho^2)^{3/2}} \{2vt, \rho, 0\}, \\ \mathbf{B}(t) &= \frac{\gamma e}{(4\gamma^2 c^2 t^2 + \rho^2)^{3/2}} \{0, 0, \rho v/c\}, \end{aligned}$$

мы добавили выражение (4.61) для определения магнитного поля. Из этих выражений следует, что время действия δt электромагнитного поля в лабораторной системе координат оценивается как

$$\delta t \sim \frac{\rho}{2\gamma c}.$$

В системе отсчёта K' , движущейся со скоростью $-v$ (почти сопровождающей частицу №2), γ -фактор для частицы №1 равен

$$\gamma' = \gamma^2(1 + v^2/c^2) \approx 2\gamma^2,$$

что можно получить, например, возведя матрицу лоренцевского буста (2.11) в квадрат. Выражения для координат частиц и электрического поля, действующего со

стороны частицы №1 на частицу №2, переписываются в аналогичном виде

$$\begin{aligned} x_1 &= v't', \quad y'_1 = -\rho/2, \quad x'_2 = 0, \quad y_2 = \rho/2, \\ \mathbf{E}' &= \frac{\gamma' e}{(\gamma'^2 c^2 t'^2 + \rho^2)^{3/2}} \{v't', \rho, 0\}, \end{aligned}$$

Таким образом, время действия поля частицы №2 на частицу №1 оценивается, соответственно, как

$$\delta t' \sim \frac{\rho}{\gamma' c} \sim \frac{\delta t}{\gamma}.$$

Теперь оценим энергию, излучённую второй частицей. Интенсивность производства энергии излучения W одна и та же во всех системах отсчёта, см. (5.79). Её проще найти в системе K' , где частица №2 всегда остаётся нерелятивистской:

$$W = \frac{2e^2 \mathbf{a}'^2}{3c^3} = \frac{2e^4 (E'^y)^2}{3c^3 m^2}$$

Мы учли только y -компоненту электрического поля, поскольку его x -компонента относительно мала как $1/\gamma'$: действительно, в выражении для \mathbf{E}' вследствие знаменателя $c|t'| \lesssim \rho/\gamma'$, при больших по модулю значениях t' знаменатель делает полное электрическое поле малым. Пиковые значения электрического поля и мощности равны

$$E'_{\max}{}^y = \frac{\gamma' e}{\rho^2}, \quad W_{\max} = \frac{2e^6 \gamma'^2}{3c^3 \rho^4} = \frac{8e^6 \gamma^4}{3c^3 \rho^4}.$$

В итоге получаем, что оценкой для полной излучённой энергии обоими частицами в лабораторной системе координат является

$$E_{\text{рад}} \sim W_{\max} \delta t \sim \frac{\gamma^3}{(mc^2)^2} \left(\frac{e^2}{\rho} \right)^3. \quad (7.35)$$

Проверим то, что частица №2 в системе K' в самом деле остаётся нерелятивистской. Действительно, скорость частицы №2 после действия со стороны частицы №1 — т.е. интеграл от y -компоненты ускорения — оценивается как

$$\frac{1}{c} \int dt' a'^y \sim \frac{\delta t' E'_{\max}{}^y}{c} \sim \frac{e^2}{\rho m c^2} = \frac{r_0}{\rho} \ll 1.$$

Глава 8

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

§8.1. Движение нерелятивистской частицы в слабо неоднородном магнитном поле

8.1.1 Движение частицы в однородных скрещенных электрическом и магнитных полях

8.1.2 Движение частицы в неоднородном поле

Частица, имеющая заряд e и массу m , движется в заданном слабо неоднородном магнитном поле \mathbf{B} . Найти траекторию частицы.

Литература: Кузнецов и Смилга (2001).

Рассмотрим заряженную частицу, двигающуюся в неоднородном магнитном поле \mathbf{B} . Заряд частицы e , её масса m . Обозначим проекцию скорости \mathbf{v} частицы на магнитную силовую линию через v_{\parallel} , а проекцию скорости частицы на плоскость, нормальную к силовой линии $-\mathbf{v}_{\perp}$:

$$v_{\parallel} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}), \quad \mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - v_{\parallel} \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}}{B}.$$

Мы будем называть магнитное поле слабонеоднородным для частицы, если ларморовский радиус ξ её вращения в магнитном поле много меньше чем характерный пространственный масштаб, на котором изменяется магнитное поле:

$$\xi = \frac{v_{\perp}}{\omega_B} \ll L \sim \frac{B}{|\text{grad } \mathbf{B}|}, \quad \omega_B = \frac{eB}{mc}.$$

Разделение на медленное и быстрое движения

Обозначим через $\mathbf{r}(t)$ траекторию частицы. В общем случае траектория частицы в слабо неоднородном магнитном поле представляет из себя изогнутую спираль. Выделим медленное движение частицы $\mathbf{R}(t)$, траектория которого соответствует оси этой спирали:

$$\mathbf{R}(t) = \langle \mathbf{r}(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{-T}^0 dt' \mathbf{r}(t + t'),$$

Усреднение $\langle \dots \rangle_T$ производится по времени T , большому по сравнению с периодом обращения частицы вокруг

линий магнитного поля $2\pi/\omega_B$, но малому по сравнению со временем, за которое частица переходит в область с существенно другим магнитным полем, то есть на расстояние порядка L .

Быстрое движение, представляющее из себя вращение вокруг силовой линии магнитного поля, описывает неусреднённая часть $\xi(t)$ радиус-вектора $\mathbf{r}(t)$:

$$\xi(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{R}(t).$$

Скорость движения ведущего центра мы будем обозначать $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$. Магнитное поле в актуальной точке положения частицы отличается от магнитного поля в точке положения ведущего центра, поскольку магнитное поле слабо неоднородно. Относительная величина этого отличия имеет первый порядок по ξ/L ,

$$\delta \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}) - \mathbf{B}(\mathbf{R}) \approx (\xi \cdot \nabla) \mathbf{B}(\mathbf{R})$$

Далее мы подразумеваем, что магнитное поле берётся в точке \mathbf{R} , так что $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{R})$.

Уравнение движения частицы

$$\ddot{\mathbf{R}} + \ddot{\xi} = \frac{e}{mc} [(\dot{\mathbf{R}} + \dot{\xi}) \times (\mathbf{B} + \delta \mathbf{B})], \quad (8.1)$$

усреднённое по периоду быстрого вращения, приводит к уравнению

$$\ddot{\mathbf{R}} = \frac{e}{mc} [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] + \frac{e}{mc} \langle [\xi \times \delta \mathbf{B}] \rangle.$$

Второе слагаемое в правой части есть сила действия магнитного поля на магнитный диполь $\boldsymbol{\mu}$, создающийся быстрым вращением заряженной частицы, см. (7.29). Поэтому окончательное уравнение на ведущий центр принимает вид

$$m \ddot{\mathbf{R}} = \frac{e}{c} [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] + (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathbf{B}. \quad (8.2)$$

Если это уравнение вычестить из исходного (8.1), и удерживать только первый порядок по ξ , то мы получим уравнение на быстрое вращение частицы вокруг магнитной силовой линии,

$$\ddot{\xi} = \frac{e}{mc} [\dot{\xi} \times \mathbf{B}]. \quad (8.3)$$

Нулевое приближение Уравнение (8.3) описывает быстрое вращение частицы вокруг магнитной линии, поэтому $\boldsymbol{\xi} \perp \mathbf{B}$. В нулевом приближении по малому параметру ξ/L скорость вращения определяется поперечной компонентой скорости движения частицы. Таким образом,

$$v_{\perp} = -\omega_B \xi, \quad \boldsymbol{\mu} = \frac{ev_{\perp}\boldsymbol{\xi}}{2c} \mathbf{b} = -\frac{mv_{\perp}^2}{2B} \mathbf{b}. \quad (8.4)$$

Мы ввели цилиндрическую систему координат, ось z которой сонаправлена магнитному полю; в этой системе координат v_{\perp} – аксиальная скорость и может принимать в т.ч. и отрицательные значения.

В этом же приближении в правой части уравнения (8.2) на движение ведущего центра надо удерживать только первое слагаемое (поскольку второе относительно мало как $(\xi/L)^2$), получив

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V}_{\parallel}, \quad \dot{\mathbf{V}}_{\parallel} = \frac{e}{mc} [\mathbf{V}_{\parallel} \times \mathbf{B}]. \quad (8.5)$$

Если мы допустим, что в \mathbf{V}_{\parallel} есть компонента, направления поперёк магнитного поля, то в $\dot{\mathbf{V}}_{\parallel}$ мы получим вклад, по амплитуде сравнимый с $\ddot{\boldsymbol{\xi}}$. Однако суть разделения на быстрые и медленные переменные состоит в том, что ускорение ведущего центра $|\dot{\mathbf{V}}|$ должно быть много меньше ускорения самой частицы $|\dot{\mathbf{v}}|$. Для того, чтобы ускорение ведущего центра было мало, его скорость движения должна быть направлена в нулевом приближении вдоль силовой линии магнитного поля,

$$\dot{\mathbf{V}}_{\parallel} \approx 0, \quad \mathbf{V}_{\parallel} = v_{\parallel} \mathbf{b}. \quad (8.6)$$

Из (8.5) следует, что при этом ускорение ведущего центра формально равно нулю. На самом деле оно не ноль, но его невозможно учесть в уравнении движения, записанном в нулевом приближении, поскольку его точность не позволяет этого сделать. Действительно, ускорение, которое испытывает ведущий центр, равно:

$$\dot{\mathbf{V}}_{\parallel} = \frac{d}{dt}(v_{\parallel} \mathbf{b}) = v_{\parallel}^2 (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \frac{dv_{\parallel}}{dt} \mathbf{b}. \quad (8.7)$$

Мы учли как то, что по мере смещения ведущего центра изменяется направление магнитного поля \mathbf{b} , так и то, проекция скорости v_{\parallel} может меняться со временем. Как и должно быть, ускорение ведущего центра мало по сравнению с ускорением самой частицы

$$|\dot{\mathbf{V}}_{\parallel}| \sim \frac{v^2}{L} \sim \frac{\xi}{L} |\ddot{\boldsymbol{\xi}}|,$$

поскольку, в том числе, d/dt оценивается как v/L , то есть как обратное время смещения частицы на расстояние порядка L .

Первое приближение Для того, чтобы получить уравнение движения ведущего центра в первом порядке по неоднородности магнитного поля, представим действительные скорость и ускорение ведущего центра в виде

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V}_{\parallel} + \mathbf{V}_d \quad \Rightarrow \quad \ddot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{V}}_{\parallel} + \dot{\mathbf{V}}_d.$$

По смыслу, \mathbf{V}_d должна быть направлена поперёк магнитного поля, поскольку продольная компонента скорости уже включена в \mathbf{V}_{\parallel} . Вклад в ускорение $\dot{\mathbf{V}}_{\parallel}$ (8.7), вычисленный в нулевом приближении, в первом приближении ещё пока не является скомпенсированным в уравнении движения ведущего центра. Поэтому в первом приближении уравнение на движение ведущего центра имеет вид

$$m \dot{\mathbf{V}}_{\parallel} = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \frac{e}{c} [\mathbf{V}_d \times \mathbf{B}]. \quad (8.8)$$

По той же логике, по которой на предыдущем шаге мы положили $\dot{\mathbf{V}}_{\parallel} \approx 0$, на этом шаге мы положили $\dot{\mathbf{V}}_d \approx 0$.

Движение ведущего центра вдоль линии магнитного поля. Адиабатический инвариант Спроектируем уравнение движения ведущего центра (8.8) на направление магнитного поля. В результате получим:

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = (\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{b}) (\mathbf{b} \cdot \nabla) B = -\frac{mv_{\perp}^2}{2B} (\mathbf{b} \cdot \nabla) B. \quad (8.9)$$

где мы воспользовались (8.4).

Покажем, что уравнение движения (8.9) предполагает сохранение адиабатического инварианта. Это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\frac{v_{\perp}^2}{2B} \frac{1}{v_{\parallel}} \frac{dB}{dt}.$$

Поскольку полная кинетическая энергия сохраняется,

$$v^2 = v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2 = \text{const},$$

то уравнение движения равносильно

$$\frac{d(v_{\perp}^2)}{v_{\perp}^2} = \frac{dB}{B} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_{\perp}^2}{B} = \text{const}, \quad (8.10)$$

то есть сохраняется адиабатический инвариант (записанный в нерелятивистском виде).

Движение ведущего центра поперёк линии магнитного поля. Скорость дрейфа. Спроектируем уравнение движения ведущего центра (8.8) на плоскость, нормальную к силовой линии, путём векторного умножения на единичный вектор \mathbf{b} . В результате найдём скорость дрейфа \mathbf{V}_d :

$$\mathbf{V}_d = \frac{1}{\omega_B} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right) [\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b}] \quad (8.11)$$

где \mathbf{V}_d – проекция скорости ведущего центра на плоскость, нормальную к магнитному полю. Таким образом, скорость дрейфа \mathbf{V}_d направлена нормально как к направлению кривизны линии, так и самому магнитному полю. Эту скорость называют скоростью дрейфа.

8.1.3 Дополнительные задачи

§8.2. Движение магнитных моментов и спинов в электромагнитном поле

• **Задача 1:** Однородно заряженный шарик радиуса a пролетает параллельно обкладкам конденсатора, через его центр. На влёте в конденсатор шарик вращается вокруг оси, нормальной к обкладкам конденсатора, с угловой скоростью ω (так что $a\omega \ll c$) в собственной системе координат. Радиус круглых обкладок конденсатора равен R , скорость шарика V сравнима со скоростью света, его масса m . Найдите изменение ориентации оси вращения шарика после пролёта через конденсатор. Массовая плотность материала шарика равна ρ_m , плотность заряда в нём — ρ .

• **Решение:** Перейдём в систему координат, связанную сдвигающимся шариком. Найдём сначала связь между моментом импульса \mathbf{L} и магнитным моментом $\boldsymbol{\mu}$ шарика. Согласно (4.35) и (5.31)

$$\mathbf{L} = \int d^3r [\mathbf{r} \times \vec{p}] = \rho_m \int d^3r [\mathbf{r} \times \mathbf{v}],$$

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c} \int d^3r [\mathbf{r} \times \mathbf{j}] = \frac{\rho}{2c} \int d^3r [\mathbf{r} \times \mathbf{v}] = \frac{\rho}{2c\rho_m} \mathbf{L}$$

где \mathbf{v} — локальная скорость элемента шарика. Таким образом, уравнение на движение механического момента шарика есть

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt'} = [\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}'] = \frac{\rho}{2c\rho_m} [\mathbf{L} \times \mathbf{B}']$$

где штрихи подчёркивают ещё раз, что соответствующие величины берутся в сопровождающей шарик системе координат.

Магнитное поле в движущейся системе координат вычисляется по формулам преобразования электромагнитного поля (4.6):

$$\mathbf{B}' = -\frac{\gamma}{c} [\mathbf{V} \times \mathbf{E}],$$

где \mathbf{E} — электрическое поле внутри конденсатора. Таким образом, магнитное поле \mathbf{B}' направлено параллельно обкладкам конденсатора и нормально к направлению движения шарика. Время действия t' этого магнитного поля равно

$$t' = \frac{2R}{\gamma V}$$

где γ -фактор появился вследствие лоренцевского сокращения длины, см. (2.16).

В результате получаем, что в собственной системе координат шарик ось вращения шарика повернулась на угол

$$\vartheta = \frac{\rho}{2c\rho_m} \mathbf{B}' t' = \frac{\rho R E}{c^2 \rho_m} = \frac{Q E R}{M c^2}, \quad (8.12)$$

где Q — полный заряд шарика, а M — его масса.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Christoffel symbols, 69
- g-фактор, 32
- Huygens' radiation source, 79
- rapidity, 19
- Баргмана-Мишеля-Телегди уравнение, 32
- Био-Савара-Лапласа закон, 51
- Гюйгенса
 - элементарный излучатель, 79
- Дошлера эффект, 42
- Кристоффеля символ, 69
- Кронекера символ, 63
- Кулона
 - закон, 47
 - калибровка, 34
- Лиенара-Вихерга потенциалы, 43
- Лоренца
 - калибровка, 34
 - преобразование, 17
 - сила, 31
- Максвелла
 - уравнения
 - первая пара, 35
- Минковского
 - метрика, 18
 - пространство, 18
- Паули гамильтониан, 30
- Эйнштейна
 - соглашение, 63
 - формула для массы покоя, 26
- абerrация света, 42
- ананоль, 59
- быстрота, 19
- вектор
 - аксиальный, 66
- волна
 - длина, 42
 - частота, 42
 - циклическая, 41
- волновой вектор, 41
- интервал, 16
- калибровочное преобразование, 34
- ковариантная запись уравнений движения, 26
- момент
 - дипольный, 48
 - квадрупольный, 48
 - магнитодипольный, 52
 - тороидальный, 59
- оператор д'Аламбера, 37
- уравнение
 - волновое, 37
 - непрерывности, 23
- электромагнитное поле
 - инварианты, 35
 - тензор, 30
- энергия
 - электростатическая, 49
- энергия покоя, 26

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература по электродинамике

- Балдин, А.М., В.И. Гольданский и И.Л. Розенталь (1959). Кинематика ядерных реакций. Москва: Государственное издательство физико-математической литературы.
- Джексон, Дж. (1965). Классическая электродинамика. М.: Мир.
- Ландау, Л. Д. и Е. М. Лифшиц (1988). Теоретическая физика, том II. Теория поля. М: Наука.
- Мешков, И.Н. и Б.В. Чириков (1987). Электромагнитное поле. Часть I. Электричество и магнетизм. Новосибирск: Наука.
- Топтыгин, И. Н. (2002). Современная электродинамика, часть 1. Микроскопическая теория. Москва-Ижевск: РХД.
- (2005). Современная электродинамика, часть 2. Теория электромагнитных явлений в веществе. Москва-Ижевск: РХД.
- Угаров, Владимир Александрович (1977). Специальная теория относительности. Наука.

Дополнительная литература по электродинамике

- Dubovik, V.M. и V.V. Tugushev (1990). Toroid moments in electrodynamics and solid-state physics. Англ. В: Physics reports 187.4, с. 145–202.
- Radescu Jr, E. и Georgeta Vaman (2012). Cartesian multipole expansions and tensorial identities. В: Progress In Electromagnetics Research B 36, с. 89–111.
- Клепиков, Н. П. (1985). Силы торможения излучением и излучение заряженных частиц. В: Успехи физических наук 146.2, с. 317–339.
- Кузнецов, В.П. и В.П. Смилга (2001). Движение заряженной частицы в слабо-неоднородном магнитном поле. Дрейфовая теория: учебно-методическое пособие. М.: МФТИ.
- Окунь, Лев Борисович (2008). Формула Эйнштейна: $E_0 = mc^2$. «Не смеётся ли Господь Бог»? В: Успехи физических наук 178.5, с. 541–555.
- Тернов, И. М. и В. А. Бордовицын (1980). О современной интерпретации классической теории спина Я. И. Френкеля. В: Успехи физических наук 132.3.

Дополнительная литература, не касающаяся непосредственно классической электродинамики

- Olver, Frank W.J. и др. (2010). NIST Handbook of Mathematical Functions. В: Вергелес, С. Н. (2008). Лекции по квантовой электродинамике. М.: ФИЗМАТЛИТ.
- Пескин, М. и Д. Шредер (2001). Введение в квантовую теорию поля. РХД.
- Фейнман, Р. и А. Хибс (1968). Квантовая механика и интегралы по траекториям. Москва: Мир.
- Флюгге, З. (1974). Задачи по квантовой механике, том 2. М.: Мир.

Оригинальные работы

Оглавление

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ ДЛЯ ФАКУЛЬТЕТА ФКЭ МФТИ	3
Вопросы, которые надо знать студенту, желающему сдать экзамен не менее чем на три балла	3
из десяти	
Вопросы, которые надо знать студенту, желающему сдать экзамен не менее чем на пять баллов	3
из десяти	
Список тем и билеты на экзамен	4
Список задач, предлагаемых на экзамене по Теории поля для ФФКЭ	5

Часть I

КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Глава 1	
Лагранжев и Гамильтонов формализмы	7
1.1. Формализм Лагранжа: одна степень свободы	7
1.2. Формализм Гамильтона: одна степень свободы	8
1.2.1 Скобки Пуассона	8
1.2.2 Каноническое преобразование	8
1.2.3 Переменные уничтожения и рождения a и a^*	8
1.2.4 Действие в формализме Гамильтона	9
1.2.5 Уравнение Гамильтона-Якоби	9
1.3. Законы сохранения	10
1.3.1 Теорема Нётер	10
1.3.2 Поле	12

Часть II

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Глава 2	
Четырёх-мерное пространство-время	13
2.1. Постулаты релятивистской механики	13
2.1.1 Недостаточность галилеевской механики и необходимость новой теории.	13
2.1.2 Постулаты специальной теории относительности	14
2.1.3 Принцип минимума действия	15
2.1.4 Встроенные противоречия классической теории поля и её связь с квантовой теорией	15
2.2. Инерциальные системы координат	16
2.2.1 Инерциальные декартовы системы координат	16
2.2.2 Переход из одной инерциальной системы координат в другую	16
2.2.3 Интервал в пространстве Минковского	18
2.2.4 Частный пример преобразования Лоренца: лоренцевский буст	18
2.2.5 Частный пример преобразования Лоренца: поворот в пространстве	20
2.3. Движение материальной точки	20
2.3.1 Мировая линия частицы	20

2.3.2	Движение свободного тела в инерциальной системе отсчёта	21
2.3.3	Общий случай движения частицы	21
2.3.4	Переход из одной системы координат в другую. Сложение скоростей.	22
2.4.	Описание движения частиц в терминах непрерывной среды	22
2.4.1	Четырёх-мерный ток	23
2.4.2	Сохраняющийся полный заряд	23
2.4.3	Связь потока с траекториями частиц	23
2.4.4	Распределение частиц по скоростям	24

Глава 3

Движение частиц в электромагнитном поле, взаимодействие частиц 25

3.1.	Действие и уравнения движения для свободной частицы	25
3.1.1	Вариация мировой линии и действия	25
3.1.2	Энергия и импульс частицы	25
3.1.3	Безмассовые частицы	26
3.2.	Распад и столкновения частиц	27
3.2.1	Распад частицы	27
3.2.2	Столкновение частиц	27
3.3.	Совокупность частиц как непрерывная среда, тензор энергии-импульса	28
3.3.1	Законы сохранения	28
3.3.2	Непрерывная среда в пределе отсутствия неупругих столкновений	29
3.4.	Движение заряженной частицы в электромагнитном поле	29
3.4.1	Вклад в действие, лагранжиан и гамильтониан	29
3.4.2	Уравнения движения	30
3.4.3	Тензор электромагнитного поля	30
3.4.4	Уравнения движения в трёхмерной форме	31
3.5.	Собственный спин частиц	31
3.5.1	Уравнение движения спина в однородном поле	32
3.5.2	Аномальный магнитный момент	33

Глава 4

Электромагнитное поле и его возбуждение зарядами 34

4.1.	Свойства электромагнитного поля	34
4.1.1	Калибровочная инвариантность	34
4.1.2	Преобразование Лоренца для компонент электромагнитного поля	35
4.1.3	Первая пара уравнений Максвелла	35
4.1.4	Релятивистские инварианты электромагнитного поля	35
4.2.	Уравнения движения электромагнитного поля	36
4.2.1	Действие свободного электромагнитного поля	36
4.2.2	Вторая пара уравнений Максвелла	36
4.2.3	Поле, создающиеся токами: запаздывающие потенциалы	36
4.3.	Тензор энергии-импульса	38
4.3.1	Нётеровский метод построения тензора энергии-импульса	38
4.3.2	Вариация действия	38
4.3.3	Матричная структура тензора энергии-импульса электромагнитного поля	39
4.4.	Момент импульса	40
4.5.	Распространение электромагнитных волн	41
4.5.1	Плоская электромагнитная волна	41
4.5.2	Плоская монохроматическая электромагнитная волна	41
4.5.3	Эффект Доплера и абберация света	42
4.6.	Поле движущегося точечного заряда	43
4.6.1	Потенциалы Лиенара-Вихерта	43

4.6.2	Электрическое и магнитное поля	43
4.6.3	Поле равномерно движущегося заряда	44

Часть III

ПРИЛОЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Глава 5

Слабо релятивистские эффекты

		47
5.1.	Поле неподвижных зарядов и их взаимодействие с внешним постоянным электрическим полем	47
5.1.1	Закон Кулона	47
5.1.2	Поле системы статических зарядов	47
5.1.3	Электростатическая энергия	49
5.1.4	Энергия системы зарядов во внешнем электрическом поле	49
5.1.5	Сила и момент сил, действующих на диполь	50
5.2.	Поле постоянных токов и их взаимодействие с внешним постоянным магнитным полем	51
5.2.1	Закон Био-Савара-Лапласа	51
5.2.2	Магнито-дипольный момент	52
5.2.3	Потенциальная энергия системы токов в магнитное поле	52
5.3.	Дипольное и квадрупольное излучение	53
5.3.1	Поле электрического диполя	53
5.3.2	Магнито-дипольный и квадрупольный вклады	54
5.4.	Мультипольное излучение	55
5.4.1	Магнито-мультипольное разложение в статике	56
5.4.2	Поле системы нестационарных токов	56
5.4.3	Излучение магнитного типа	58
5.4.4	Излучение электрического типа	58
5.5.	Торможение излучением	60
5.5.1	Скорость производства электромагнитной энергии уходящих волн	60
5.5.2	Торможение излучением	60

Часть IV

APPENDIX

Глава 6

Элементы тензорного анализа

		63
6.1.	Тензорное исчисление	63
6.1.1	Контравариантные и ковариантные вектора	63
6.1.2	Метрика	64
6.1.3	Полностью антисимметричный псевдотензор	65
6.2.	Евклидово пространство	66
6.2.1	Скалярное произведение векторов	66
6.2.2	Аксиальный вектор в 3-х мерном пространстве	66
6.3.	Пространство Минковского	67
6.3.1	Антисимметричный тензор второго ранга	68
6.3.2	Операции поднятия и опускания индексов	68
6.4.	Криволинейные координаты, вложенные в евклидово пространство	68
6.4.1	Ковариантная производная	69
6.4.2	Операции векторного дифференцирования	70
6.4.3	Двумерная поверхность, вложенная в трёх-мерное пространство	71

Глава 7

Отдельные вопросы

7.1.	Функции Грина волнового уравнения	72
7.1.1	Запаздывающая функция Грина	72
7.1.2	Опережающая и другие функции Грина	73
7.1.3	Тензорная функция Грина	73
7.1.4	Свойства функций Бесселя	73
7.2.	Параметризация поля в случае сферической геометрии	74
7.2.1	Параметризация векторного поля	74
7.2.2	Электромагнитное поле	75

Часть V**ЗАДАЧИ**

7.3.	Преобразование Лоренца	77
7.4.	Столкновение и распад частиц	77
7.5.	Электро и магнито статика	77
7.5.1	Электростатика	77
7.5.2	Магнитостатика	78
7.6.	Электромагнитные волны	79
7.7.	Излучение электромагнитных волн	79
7.7.1	Когерентное излучение	79
7.7.2	Торможение излучением	80
7.7.3	Излучение релятивистских частиц	80

Глава 8

Движение частиц в электромагнитном поле

8.1.	Движение нерелятивистской частицы в слабо неоднородном магнитном поле	82
8.1.1	Движение частицы в однородных скрещенных электрическом и магнитных полях	82
8.1.2	Движение частицы в неоднородном поле	82
8.1.3	Дополнительные задачи	83
8.2.	Движение магнитных моментов и спинов в электромагнитном поле	84

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

85

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

86

Основная литература по электродинамике	86
Дополнительная литература по электродинамике	86
Дополнительная литература, не касающаяся непосредственно классической электродинамики	86
Оригинальные работы	86